

# Desigualdades y relaciones lógicas

Vamos a usar las siguientes propiedades de las relaciones binarias  $<$  y  $\leq$ .

**Relación  $<$  es un orden lineal antireflexivo.**

- Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

- Propiedad transitiva: para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$(a < b) \quad \wedge \quad (b < c) \quad \implies \quad a < c.$$

**Relación  $\leq$  es un orden lineal reflexivo.**

- Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , se cumple por lo menos una de las siguientes condiciones:

$$a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a.$$

- Propiedad antisimétrica: para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$(a \leq b) \quad \wedge \quad (b \leq a) \quad \implies \quad a = b.$$

- Propiedad transitiva: para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$(a \leq b) \quad \wedge \quad (b \leq c) \quad \implies \quad a \leq c.$$

## Relaciones lógicas entre dos desigualdades

**Ejemplo.** Establecer una relación lógica entre las siguientes dos desigualdades:

$$x > 3$$

$$x > 7$$

*Solución.* La desigualdad  $x > 7$  implica que  $x > 3$ :

$$x > 3 \longleftarrow x > 7$$

En efecto, si  $x > 7$ , entonces recordando que  $7 > 3$  y aplicando la propiedad transitiva obtenemos que  $x > 3$ .  $\square$

En cada uno de los siguientes ejercicios, establezca una relación lógica entre dos desigualdades:

1.

$$x < -5$$

$$x < 3$$

2.

$$x \leq 5$$

$$x < 5$$

3.

$$x \geq 2$$

$$x = 2$$

## Simplificar sistemas de desigualdades

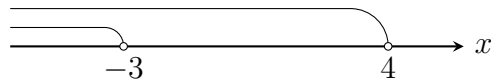
**Ejemplo.** Simplificar el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x < 4, \\ x < -3. \end{cases}$$

*Primera solución (lógica).* El sistema pide que se cumplan *ambas* desigualdades  $x < 4$  y  $x < -3$ . Pero si  $x < -3$ , entonces la condición  $x < 4$  se cumple automáticamente. Por lo tanto, el sistema original es equivalente a una sólo desigualdad  $x < -3$ :

$$\begin{cases} x < 4, \\ x < -3; \end{cases} \iff x < -3. \quad \square$$

*Segunda solución (geométrica).* Tenemos que encontrar la intersección de dos intervalos:



Del dibujo se ve que la intersección es  $(-\infty, -3)$ . □

Resuelve (simplifique) los siguientes sistemas de desigualdades:

4.  $\begin{cases} x \leq 7, \\ x \leq 3; \end{cases} \iff$

5.  $\begin{cases} x < -1, \\ x < 5; \end{cases} \iff$

6.  $\begin{cases} x \leq a, \\ x \leq b; \end{cases} \iff$

7.  $\begin{cases} x \leq -2, \\ x < -2; \end{cases} \iff$

8.  $\begin{cases} x > 5, \\ x > 9; \end{cases} \iff$

$$9. \quad \begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$10. \quad \begin{cases} x > 7, \\ x \geq 7. \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

## Relaciones lógicas entre tres desigualdades

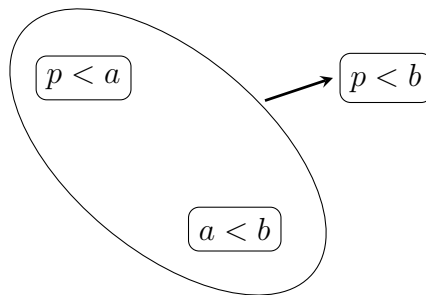
**Ejemplo.** Encuentre una relación lógica entre las siguientes tres desigualdades:

$$p < a$$

$$p < b$$

$$a < b$$

*Solución.* Respuesta: si  $p < a$  y  $a < b$ , entonces  $p < b$ . En otras palabras, la conjunción de las desigualdades  $p < a$  y  $a < b$  implica la desigualdad  $p < b$ :



□

**11.** Encuentre una relación lógica entre las siguientes tres desigualdades:

$$x < y$$

$$z < y$$

$$x < z$$

**12.** Encuentre una relación lógica entre las siguientes tres desigualdades:

$$a \leq b$$

$$a \geq b$$

$$a = b$$