Imágenes y preimágenes de uniones e intersecciones de familias de conjuntos

Objetivos. Demostrar las fórmulas principales para las imágenes y preimágenes de las uniones e intersecciones de familias de conjuntos.

Requisitos. Imágenes y preimágenes de conjuntos bajo funciones, unión e intersección de una familia de conjuntos, propiedades de los cuantificadores.

1. Definición de la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots$$

2. Definición de la intersección de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots$$

3. Definición de la unión y de la intersección. Indique las correspondencias con flechitas:

$\exists i \in I \quad x \in C_i$	x pertenece a todos los conjuntos C_i	$x \in \bigcup_{i\in I} C_i$
$\forall i \in I \quad x \in C_i$	x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos C_i	$x \in \bigcap_{i\in I} C_i$

Propiedades de las preimágenes

4. Definición de la preimagen (repaso). Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Entonces

$$f^{-1}[B] = \{x \in X\colon \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}\}.$$

5. Cómo construir razonamientos con preimágenes. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Entonces para cualquier $x \in X$ tenemos la siguiente equivalencia:

$$x \in f^{-1}[B] \qquad \iff \qquad \ldots$$

6. Preimagen de la unión de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Solución. Sea x un elemento arbitrario de X. Vamos a demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

$$x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] \qquad \xLeftrightarrow{\text{por demostrar}} \qquad x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Construyamos una cadena de equivalencias usando las definiciones de la preimagen y de la unión:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] \qquad &\xLeftrightarrow{\text{por def. de la preimagen}} \qquad \ldots \\
&\xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \qquad \ldots \\
&\xLeftrightarrow{\text{por def. de la preimagen}} \qquad \ldots \\
&\xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \qquad x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].
\end{aligned}$$

□

7. Preimagen de la intersección de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} B_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Propiedades de las imágenes

8. Definición de la imagen (repaso). Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$f[A] = \{y \in Y : \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}\}.$$

Repasemos algunas propiedades de los cuantificadores.

9. Propiedad conmutativa de los cuantificadores existenciales. Sea P un predicado de dos variables que vamos a denotar por a y b y que pertenecen a algunos conjuntos A y B respectivamente. Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\exists a \in A \quad \exists b \in B \quad P(a,b) \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \exists b \in B \quad \exists a \in A \quad P(a,b).$$

10. Intercambio del cuantificador existencial con el universal. Sea P un predicado de dos variables que vamos a denotar por a y b y que pertenecen a algunos conjuntos A y B respectivamente. Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\exists a \in A \quad \forall b \in B \quad P(a,b) \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \forall b \in B \quad \exists a \in A \quad P(a,b).$$

11. Propiedad de absorción del cuantificador universal. Sea P un predicado de una variable que vamos a denotar por a y que pertenece a un conjunto A, y sea Q una afirmación (no dependiente de a). Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\Big(\forall a \in A \quad P(a)\Big) \quad \wedge \quad Q \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \forall a \in A \quad \Big(P(a) \quad \wedge \quad Q\Big).$$

12. Propiedad de absorción del cuantificador existencial. Sea P un predicado de una variable que vamos a denotar por a y que pertenece a un conjunto A, y sea Q una afirmación (no dependiente de a). Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\Big(\exists a \in A \quad P(a)\Big) \quad \wedge \quad Q \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \exists a \in A \quad \Big(P(a) \quad \wedge \quad Q\Big).$$

13. Imagen de la unión de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subseteq X$. Demuestre que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i].$$

Solución. Sea y un elemento arbitrario de Y. Vamos a demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

$$y \in f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] \qquad \overset{\text{por demostrar}}{\Longleftrightarrow} \qquad x \in \bigcup_{i\in I} f[A_i].$$

Construyamos una cadena de equivalencias usando las definiciones de la preimagen y de la unión:

$$\begin{aligned}
y \in f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] \quad & \overset{\text{por def. de la imagen}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists x \in X \quad \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \wedge \qquad\qquad\qquad \right) \\
& \overset{\text{por def. de la unión}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists x \in X \quad \Big(\big(\exists i \in I \qquad\qquad\qquad \big) \quad \wedge \qquad\qquad \Big) \\
& \overset{\substack{\text{por la propiedad} \\ \text{de absorción}}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists x \in X \quad \exists i \in I \quad \Big(\qquad\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad\qquad \Big) \\
& \overset{\text{intercabio de } \exists \text{ con } \exists}{\Longleftrightarrow} \quad \exists i \in I \quad \exists x \in X \quad \Big(\qquad\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad\qquad \Big) \\
& \overset{\text{por def. de la imagen}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists i \in I \quad y \in \\
& \overset{\text{por def. de la unión}}{\Longleftrightarrow} \quad y \in \bigcup_{i\in I} f[A_i].
\end{aligned}$$

□

14. Imagen de la intersección de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subseteq X$. Demuestre que

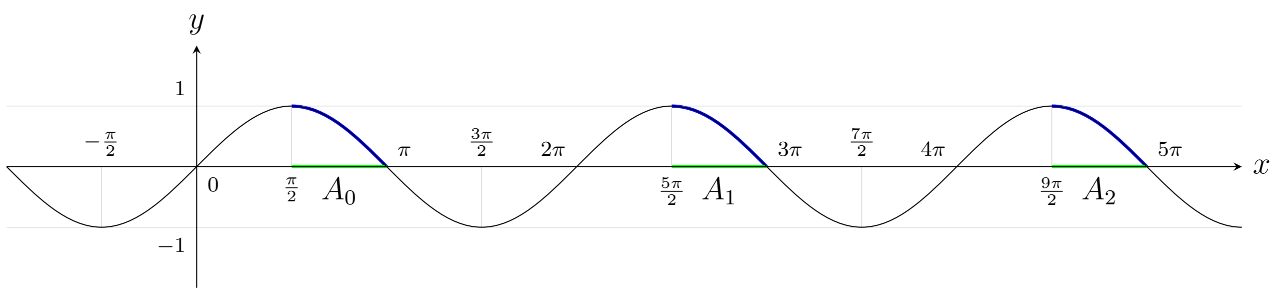
$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i].$$

Ejemplos cuando la imagen de la intersección no coincide con la intersección de las imágenes

15. Ejemplo con la función sen. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Construya una sucesión de conjuntos $A_k \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$

Solución. Dibujamos la gráfica de la función. Hay muchísimas maneras de elegir los conjuntos A_k que cumplan con la condición requerida. Por ejemplo:



Es decir, pongamos

$$A_0 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \qquad A_1 = \left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\right], \qquad A_2 = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big], \qquad \ldots$$

La fórmula general para los conjuntos A_k:

$$A_k = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big], \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

En cada uno de los intervalos A_k la función sen decrece y toma valores de 1 a 0, así que

$$f[A_k] = [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k] = [0, 1].$$

Por otro lado, los intervalos A_k son ajenos y su intersección es $\quad \ldots \quad$:

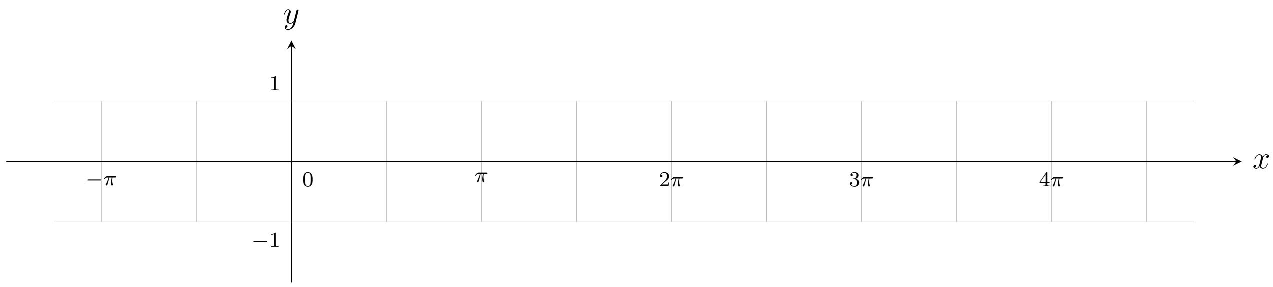
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k =$$

Por consecuencia, la imagen de la intersección también es $\quad \ldots \quad$:

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] = \qquad \square$$

16. Ejemplo con la función cos. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. Construya una sucesión de conjuntos A_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$



17. Ejemplo con una función constante. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Construya una sucesión de conjuntos A_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$