Parque zoológico de matrices normales

Objetivos. Conocer el concepto de matrices normales y sus subclases principales.

1. Tabla. La siguiente tabla muestra en forma breve las subclases principales de matrices normales. Se usa la notación $U_{\mathbb{C}}(n)$ para el conjunto (grupo) de matrices unitarias y la notación $\mathbb{T}$ para la circumferencia unitaria en $\mathbb{C}$. Después de la tabla se escriben definiciones y enunciados formales.

Nombre	Definición	Descomposición espectral
matriz normal	$A^*A = AA^*$	$A = UDU^*,\ U \in U_n(\mathbb{C})$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),\ d_j \in \mathbb{C}$
matriz unitaria	$A^*A = I_n$	$A = UDU^*,\ U \in U_n(\mathbb{C})$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),\ d_j \in \mathbb{T}$
matriz autoadjunta (hermitiana)	$A^* = A$	$A = UDU^*,\ U \in U_n(\mathbb{C})$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),\ d_j \in \mathbb{R}$
matriz positiva semidefinida, $A \geq 0$	$A^* = A,\ \operatorname{sp}(A) \subset [0, +\infty)$	$A = UDU^*,\ U \in U_n(\mathbb{C})$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),\ d_j \geq 0$
proyección ortogonal	$A^* = A,\ A^2 = A$	$A = UDU^*,\ U \in U_n(\mathbb{C})$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),\ d_j \in \{0, 1\}$

2. Definición (matrices normales y sus subclases). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que:

- A es *normal* si $A^*A = AA^*$;
- A es *unitaria* si $A^*A = I_n$;
- A es *autoadjunta* (o *hermitiana*) si $A^* = A$;
- A es *positiva semidefinida* si $A^* = A$ y $\operatorname{sp}(A) \subset [0, +\infty)$;
- A es una *proyección ortogonal* si $A^* = A$ y $A^2 = A$.

Denotamos por $U_n(\mathbb{C})$ la clase de las matrices unitarias.

La siguiente proposición nos da muchos ejemplos simples de matrices normales (agradezco al estudiante Luis Arturo Victoria Ballesteros por la idea).

3. Proposición: cada matriz diagonal es normal. Sea D una matriz diagonal. Entonces D es normal.

4. Criterio de matriz unitaria. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $A^*A = I_n$, i.e. A es una matriz unitaria.

(b) $AA^* = I_n$.

(c) las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

(d) los renglones de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

En particular, este criterio significa que cada matriz unitaria se puede tratar como la matriz de cambio de la base canónica de $\mathbb{C}^n$ a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

5. Ejercicio (números complejos especiales).

1. Si $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$ y $z \in \mathbb{T}$, entonces $z\,\overline{z} = |z|^2$.
2. Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{z} = z$.
3. Si $z \in \{0, 1\}$, entonces $z^2 = z$.

6. Ejercicio (construcción de matrices normales a partir de matrices diagonales y unitarias). Sea $A = UDU^*$, donde $U \in U_{\mathbb{C}}(n)$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$. Demuestre que:

1. A es normal.
2. Si $|d_1| = \ldots = |d_n| = 1$, entonces A es unitaria.
3. Si $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$, entonces A es autoadjunta.
4. Si $d_1, \ldots, d_n \geq 0$, entonces $A \geq 0$.
5. Si $d_1, \ldots, d_n \in \{0, 1\}$, entonces A es una proyección ortogonal.

7. Teorema (sobre matrices normales triangulares superiores). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supongamos que A es una matriz normal y al mismo tiempo triangular superior. Entonces A es una matriz diagonal.

Idea de demostración. Calcular las entradas diagonales de los productos A^*A y AA^*. En otras palabras, calcular $(A^*A)_{p,p}$ y $(AA^*)_{p,p}$. $\square$

8. Espectro de matrices autoadjuntas. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$. Demuestre que $\operatorname{sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

9. Espectro de proyecciones ortogonales. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$ y $A^2 = A$. Demuestre que $\operatorname{sp}(A) \subset \{0, 1\}$.

10. Espectro de matrices unitarias. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^*A = I_n$. Demuestre que $\operatorname{sp}(A) \subset \mathbb{T}$.

11. Espectro de matrices semejantes (repaso). Sean $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que P es invertible y $B = P^{-1}AP$. Demuestre que $\operatorname{sp}(B) = \operatorname{sp}(A)$.

Los siguientes teoremas ya no se incluyen en el examen.

12. Triangulación de Schur de matrices complejas. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tal que U^*AU es una matriz triangular superior.

13. Otra forma del mismo teorema: descomposición de Schur de matrices complejas. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior B tales que $A = UBU^*$.

14. Observación. En el teorema anterior A y B son matrices semejantes, por eso tienen el mismo espectro. Por otro lado, el espectro de la matriz triangular superior B coincide con el conjunto de sus entradas diagonales. Por lo tanto, en esta situación las entradas diagonales de B forman el espectro de A:

$$\operatorname{sp}(A) = \{B_{1,1}, \ldots, B_{n,n}\}.$$

15. Diagonalización de matrices normales. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^*A = AA^*$. Entonces existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tal que U^*AU es una matriz diagonal.

16. Otra forma del mismo teorema: descomposición espectral de matrices normales. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^*A = AA^*$. Entonces existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal D tales que $A = UDU^*$.

17. Notamos que en la situación del teorema anterior las entradas diagonales de D forman el espectro de A, y las columnas de U son vectores propios de A. En particular, esto significa que cada matriz normal es diagonalizable.

18. Descomposición espectral de matrices unitarias y autoadjuntas. En algunos casos particulares el teorema anterior se puede hacer más preciso, a saber, se pueden hacer conclusiones acerca de las entradas de la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

- Si A es unitaria, entonces $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{T}$.
- Si A es autoadjunta, entonces $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$.
- Si A es positiva semidefinida, entonces $d_1, \ldots, d_n \geq 0$.
- Si A es una proyección ortogonal, entonces $d_1, \ldots, d_n \in \{0, 1\}$.