Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Objetivos. Estudiar sistemas de ecuaciones lineales *homogéneas* (son aquellas ecuaciones lineales que tienen constantes iguales a cero). Mostrar que la solución general de estos sistemas se puede escribir como una *combinación lineal* de $n - r$ vectores, donde n es el número de las incógnitas y r es el número de los renglones no nulos en la forma escalonada.

Requisitos. Eliminación de Gauss-Jordan, matrices escalonadas reducidas, o pseudo-escalonadas reducidas, construcción de la solución general de un sistema de ecuaciones lineales.

Aplicaciones. Núcleo de una transformación lineal.

1. Definición (sistema de ecuaciones lineales homogéneas). Un *sistema de ecuaciones lineales homogéneas* es un sistema de la forma $Ax = \mathbf{0}$, esto es, con columna de constantes nula.

2. Observación. Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneas es compatible, porque el vector cero es una de sus soluciones, llamada *solución trivial*. Para un sistema de ecuaciones lineales hay dos casos posibles:

(a) puede ser compatible determinado, esto es, tener solamente una solución (la trivial);

(b) puede ser compatible indeterminado, esto es, tener por lo menos una solución no trivial.

En cada ejemplo hay que determinar cuál situación tiene caso y describir el conjunto de *todas* las soluciones.

3. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0; \\ 8x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 0; \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 0. \end{array}\right. .$$

Solución. La columna de constantes es nula y sigue siendo nula al aplicar operaciones elementales. Por eso no es necesario escribir la matriz aumentada, es suficiente trabajar con la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += 2R_1]{R_2 += -8R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & -20/3 & -29/3 \\ 0 & -1/3 & 20/3 & 29/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= 3} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & -1/3 & 20/3 & 29/3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += \frac{1}{3}R_2]{R_1 += \frac{2}{3}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por ser un sistema de ecuaciones lineales *homogéneas*, el sistema es *compatible*. Como $r = 2$ y $n = 4$, es compatible *indeterminado*. Tenemos $n - r = 2$ variables libres. Los pivotes están en las columnas 1 y 2, por eso expresamos x_1 y x_2 a través de las variables x_3 y x_4:

$$\begin{cases} x_1 &= 13x_3 + 18x_4; \\ x_2 &= 20x_3 + 29x_4. \end{cases}$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} 13x_3 + 18x_4 \\ 20x_3 + 29x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que la solución general se puede expandir en una *combinación lineal* de dos vectores constantes:

$$x = x_3 \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 18 \\ 29 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Se dice que los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 18 \\ 29 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son *soluciones básicas* de este sistema de ecuaciones. Hay que hacer la comprabación para los vectores u_1 y u_2. La hacemos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 20 & 29 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39 - 40 + 1 + 0 & 54 - 58 + 0 + 4 \\ 104 - 100 - 4 + 0 & 144 - 145 + 0 + 1 \\ -26 + 20 + 6 + 0 & -36 + 29 + 0 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

4. Ejemplo.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -6R_1]{R_2 \mathrel{+}= 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & -55 & -38 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= 2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & -110 & -76 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= 5R_2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ahora la matriz del sistema es escalonada, y el número de los renglones no nulos es $r = 3 = n$. Por eso el sistema es compatible determinado, esto es, la única solución es la trivial: $x = \mathbf{0}$.

En este ejemplo no hay sentido hacer la comprobación para $x = \mathbf{0}$. Sería más importante comprobar que la matriz del sistema en forma escalonada efectivamente tiene 3 renglones no nulos (en otras palabras, que *el rango del sistema* es igual a 3), pero en este momento del curso no tenemos métodos para comprobarlo. □

5. Ejemplo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= \frac{1}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{3} \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

Aquí $r = 2$, $n = 3$, $r < n$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{3} x_3; \\ x_2 = -\frac{11}{3} x_3. \end{cases}$$

La solución general se puede escribir en forma:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{34}{3} x_3 \\ -\frac{11}{3} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{bmatrix} 34 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Cada solución es un múltiplo de la solución básica $u = \begin{bmatrix} 34 & -11 & 3 \end{bmatrix}^\top$. Comprobación para la solución básica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 - 22 - 12 \\ 68 - 77 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

6. Ejemplo.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

Solución. Este sistema tiene solamente una ecuación. La podemos usar para expresar una variable a través de las demás, por ejemplo:

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_3.$$

Solución general:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Soluciones básicas:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación para las soluciones básicas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 6 + 0 \\ 0 + 14 - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

7. Proposición. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Si $m < n$, entonces el sistema de ecuaciones lineales homogéneas $Ax = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado, esto es, tiene por lo menos una solución no trivial.

Demostración. Usando operaciones elementales podemos transformar la matriz A en una matriz escalonada reducida B. Denotemos por r al número de los renglones no nulos de la matriz B. Entonces $r \le m < n$, y la solución general del sistema $Ax = \mathbf{0}$ se puede escribir con $n - r > 0$ variables libres. Poniendo valores no nulos en variables libres, obtenemos una solución no trivial. $\square$

8. Ejercicios. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1; \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 1. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0; \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0; \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$