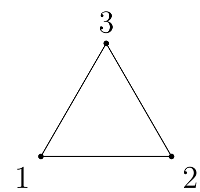
Grupo simétrico

Objetivos. Mostrar que el conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ con la operación de composición es un grupo.

Requisitos. Producto de permutaciones.

1. Permutaciones de S_3 como simetrías del triangulo regular. Fijemos en el plano un triangulo regular y denotemos sus vertices por $1, 2, 3$:



Una *simetría* del triangulo es un mapeo del triangulo sobre si mismo que no cambia distancias entre puntos. Es posible demostrar que toda simetría del triangulo regular manda sus vértices en vértices y se determina de manera única por sus valores en los vértices. Por lo tanto las simetrías del triangulo regular se pueden identificar con permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Usemos las siguientes notaciones "geométricas" para los elementos de S_3:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Tabla de multiplicación para S_3. Llenar la tabla de multiplicación para S_3 (en la intersección de la fila φ y columna ψ poner el producto $\varphi\psi$):

e	r	r^2	h_1	h_2	h_3
r			h_3		
r^2					
h_1					
h_2					
h_3					

3. Propiedades del producto de permutaciones.

1. Propiedad asociativa:

$$\forall \varphi, \psi, \chi \in S_n \qquad (\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi).$$

2. La permutación identidad, denotada por id o por e,

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

   es un elemento neutro con respecto a la multiplicación de las permutaciones:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad \varphi e = e\varphi = \varphi.$$

3. Para cada permutación $\varphi \in S_n$ su inversa φ^{-1} también es permutación y

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = e.$$

4. Si $n = 1$ o $n = 2$, entonces la multiplicación en S_n es conmutativa. Si $n \geq 3$, entonces la multiplicación en S_n no es conmutativa. De hecho, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix},$$

   entonces $\varphi\psi \neq \psi\varphi$.

4. Observación. Las propiedades 1–3 significan que el conjunto S_n con la operación de multiplicación (composición) es un *grupo*. Si $n = 1$ o $n = 2$, el grupo S_n es conmutativo. Si $n \geq 3$, el grupo S_n no es conmutativo.

5. Proposición (leyes de cancelación). Sean $\alpha, \beta, \gamma \in S_n$.

1. Si $\alpha\gamma = \beta\gamma$, entonces $\alpha = \beta$ (cancelación por la derecha).
2. Si $\alpha\beta = \alpha\gamma$, entonces $\beta = \gamma$ (cancelación por la izquierda).

Idea de demostración de 1. Multiplicar ambos lados por γ^{-1} del lado derecho, aplicar la ley asociativa, la definición de γ^{-1} y la propiedad principal de e. □

6. Proposición. Sea $\psi \in S_n$. Entonces el mapeo $f\colon S_n \to S_n$, definido por la siguiente regla es biyectivo:

$$f(\varphi) = \varphi\psi \qquad \forall \varphi \in S_n,$$

Demostración. 1. f es inyectivo. Suponemos que $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$, esto es, $\varphi_1\psi = \varphi_2\psi$. Multiplicando ambos lados de la última igualdad por ψ^{-1} del lado derecho (es decir, aplicando la cancelación por la derecha) obtenemos que $\varphi_1 = \varphi_2$.

2. f es sobreyectivo. Sea $\chi \in S_n$. Tenemos que encontrar una permutación $\varphi \in S_n$ tal que $f(\varphi) = \chi$, esto es, $\varphi\psi = \chi$. Con $\varphi = \chi\psi^{-1}$ en efecto obtenemos que $f(\varphi) = \chi$. $\square$

7. Ejercicio. Sea $\psi \in S_n$. Demuestre que el mapeo $g\colon S_n \to S_n$, definido mediante la siguiente regla es biyectivo:

$$g(\varphi) = \psi\varphi \qquad \forall \varphi \in S_n.$$

8. Propiedades de la permutación inversa.

1. $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.
2. $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$.
3. $e^{-1} = e$.

9. Proposición. El mapeo $f\colon S_n \to S_n$, definido por $f(\varphi) \coloneqq \varphi^{-1}$, es una biyección. En otras palabras, cuando φ corre S_n, tomando cada valor sólo una vez, φ^{-1} también corre S_n, tomando cada valor sólo una vez.

10. Ejemplo. Calcular los valores de φ^{-1}, cuando φ toma los siguientes valores en S_3:

$$e, \quad r, \quad r^2, \quad h_1, \quad h_2, \quad h_3.$$