Análisis de redes eléctricas de baterías y resistencias (una aplicación de sistemas de ecuaciones lineales)

Objetivos. Conocer una aplicación de sistemas de ecuaciones lineales al análisis de redes eléctricas simples que consisten en fuentes de tensión constante (pilas o baterías), resistencias y cables.

Requisitos. Solución de sistemas de ecuaciones lineales (compatibles determinados), conocimientos básicos de electricidad, especialmente las leyes de Kirchhoff.

1. Leyes de Kirchhoff de circuitos eléctricos.

- **Ley de corrientes de Kirchhoff (regla de nodos).** En todo nodo, donde la densidad de la carga no varíe en un instante de tiempo, la suma de corrientes entrantes es igual a la suma de corrientes salientes. En otras palabras, la suma algebraica de las corrientes es igual a 0 (las corrientes entrantes se tomas con $+$, las salientes con $-$).
- **Ley de tensiones de Kirchhoff (ley de voltaje, regla de mallas, ley de lazos, regla de bucles).** En toda malla (trayectoria cerrada, circuito cerrado) la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a 0.

2. Observación. La ley de corrientes sigue de la ley de conservación de cargas eléctricas. La ley de tensiones se puede considerar como un corolario de la ley de conservación de energía.

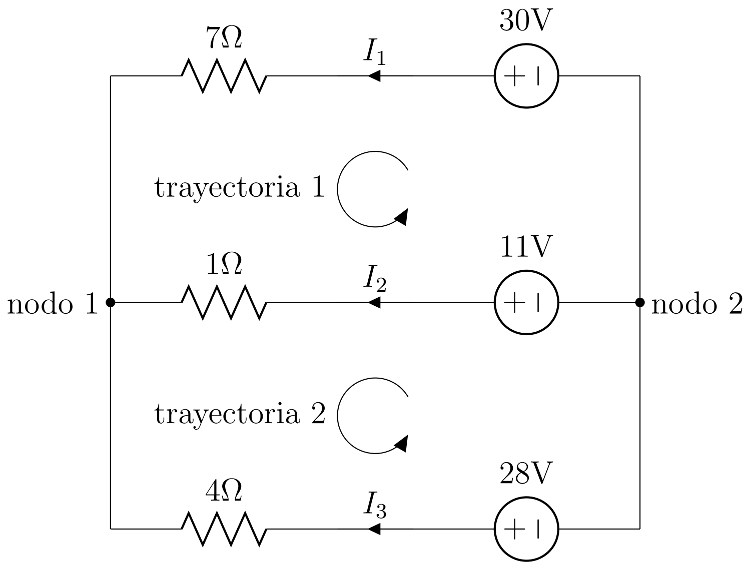
3. Ley de Ohm. En nuestros ejercicios vamos a aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff junto con la ley de Ohm: $V = RI$, el voltaje (la diferencia de potencial) = la corriente multiplicada por la resistencia.

4. Signos en la ley de tensiones. Al pasar por una batería (pila) de $-$ a $+$, el potencial sube, por eso escribiremos un sumando con el signo positivo. Al pasar por una resistencia en el sentido del corriente, el potencial baja (la energía se pierde en la resistencia).

Referencias

[1] Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, *Introducción al Álgebra Lineal.*
México: Limusa, 2009. 752 p.: il.; 23 x 15.5 cm.
ISBN-13: 978-968-18-4886-6

5. Ejemplo simple. Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 de la siguiente red:



Solución. Apliquemos la ley de corrientes de Kirchhoff al nodo 1. Los tres corrientes *entran* al nodo 1, por eso los sumandos se escriben con el signo +:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

En el nodo 2 tenemos la siguiente ecuación (todos los tres corrientes *salen* del nodo 2):

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

En la trayectoria 1 la ley de tensiones de Kirchhoff nos da la siguiente ecuación:

$$30 - 7I_1 + I_2 - 11 = 0.$$

Explicación de los signos: pasamos la batería 30 de − a +, por eso escribimos el sumando 30 con el signo +, pasamos la resistencia 7 en el sentido del corriente I_1, por eso escribimos el sumando $-7I_1$, etc.

A la trayectoria 2 le corresponde la ecuación

$$11 - I_2 + 4I_3 - 28 = 0.$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} I_1 & + & I_2 & + & I_3 & = & 0; \\ -I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0; \\ -7I_1 & + & I_2 & & & = & -19; \\ & - & I_2 & + & 4I_3 & = & 17. \end{array}\right.$$

Lo escribamos en la forma matricial y resolvemos usando el método de Gauss–Jordan:

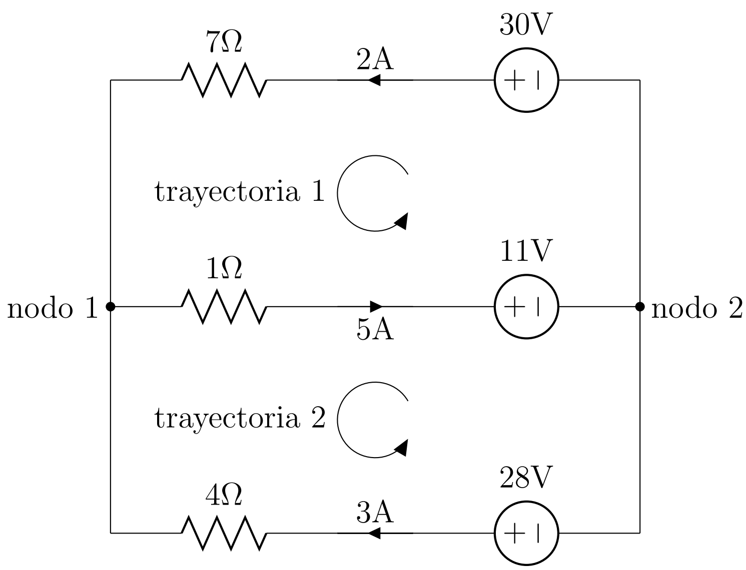
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & -1 & 4 & 17 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += 7R_1]{R_2 += R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & -19 \\ 0 & -1 & 4 & 17 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 17 \\ 0 & 8 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= (-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -17 \\ 0 & 8 & 7 & -19 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 -= 8R_2]{R_1 -= R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 39 & 117 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 *= \frac{1}{39}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 += 4R_3]{R_1 -= 5R_3}$$

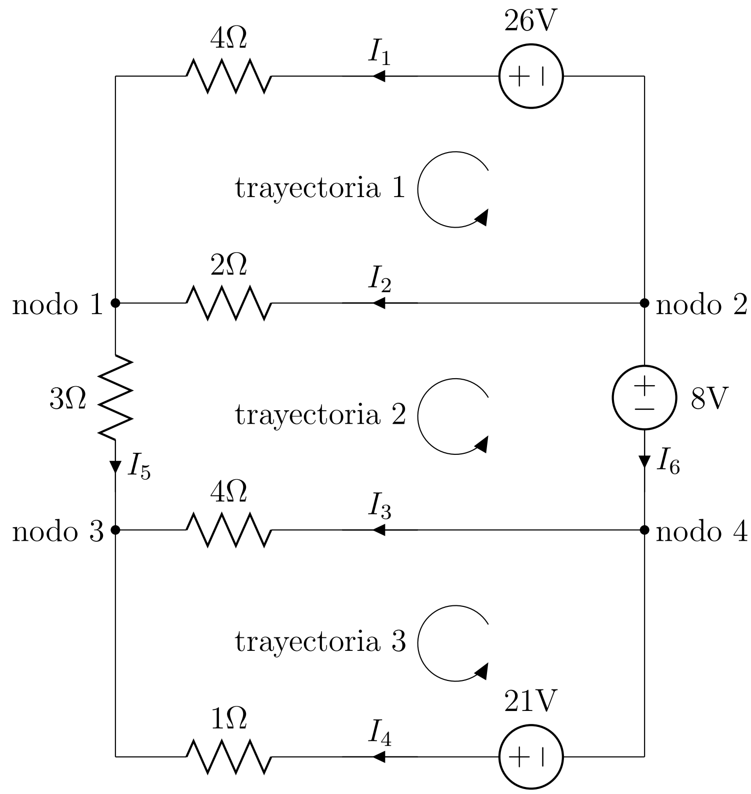
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Respuesta: $I_1 = 2\text{A}$, $I_2 = -5\text{A}$, $I_3 = 3\text{A}$. El valor negativo de I_2 y significa que en realidad la dirección de la corriente es opuesta a la dibujada en el dibujo original. Indicamos la respuesta en el dibujo:



Notemos que la corriente pasa a través de la segunda pila (de 11V) en el sentido contrario, i.e. la pila está en el régimen de recarga. □

6. Ejemplo. Determine las corrientes $I_1, \ldots, I_6$ de la siguiente red:



Solución. Apliquemos la ley de corrientes de Kirchhoff a los nodos 1, 2, 3, 4:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_5 &= 0; \\ -I_1 - I_2 - I_6 &= 0; \\ I_3 + I_4 + I_5 &= 0; \\ -I_3 - I_4 + I_6 &= 0. \end{aligned}$$

Apliquemos la ley de tensiones de Kirchhoff y la ley de Ohm a las trayectorias 1, 2, 3:

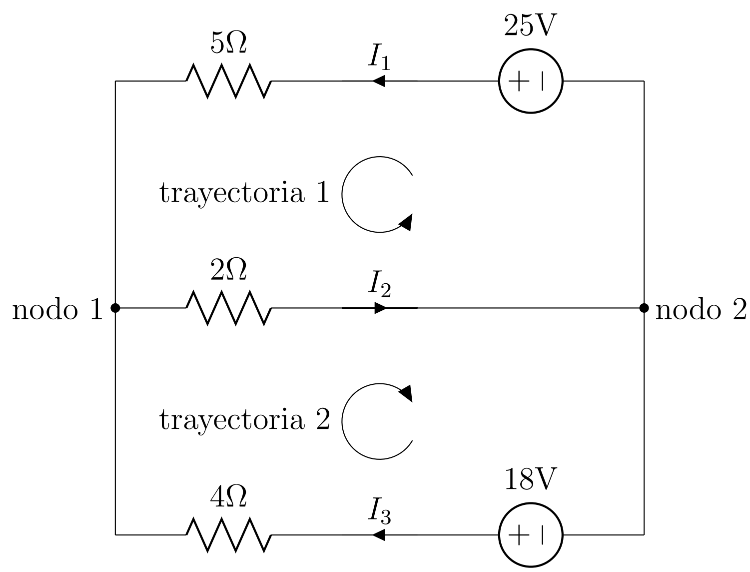
$$\begin{aligned} 26 - 4I_1 + 2I_2 &= 0; \\ 8 - 2I_2 - 3I_5 + 4I_3 &= 0; \\ -21 - 4I_3 + I_4 &= 0. \end{aligned}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial y lo resolvemos usando el método de Gauss–Jordan (el sistema tiene una solución única):

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right] \implies \begin{array}{rcr} I_1 &=& 4; \\ I_2 &=& -5; \\ I_3 &=& -4; \\ I_4 &=& 5; \\ I_5 &=& -1; \\ I_6 &=& 1. \end{array}$$

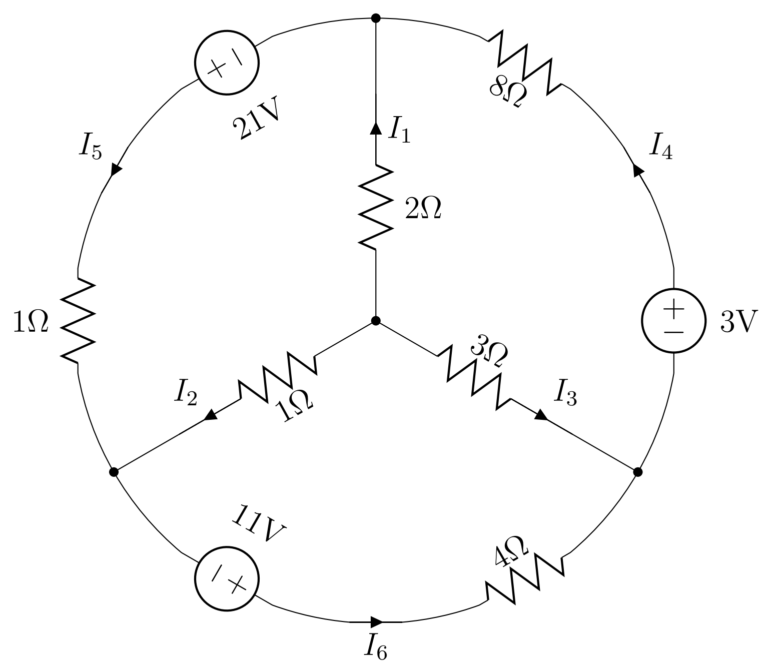
□

7. Ejercicio simple. Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 de la siguiente red:



Respuesta: $I_1 = 3\text{A}$, $I_2 = 5\text{A}$, $I_3 = 2\text{A}$.

8. Ejercicio.



Respuesta: $I_1 = 5\text{A}$, $I_2 = -4\text{A}$, $I_3 = -1\text{A}$, $I_4 = 2\text{A}$, $I_5 = 7\text{A}$, $I_6 = 3\text{A}$.