Matrices similares (matrices semejantes)

Objetivos. Estudiar el concepto de matrices similares (llamadas también matrices semejantes); demostrar que matrices similares poséen varias propiedades comunes.

Requisitos. Operador lineal, cambio de la matriz asociada a un operador lineal al cambiar la base del espacio, relación de equivalencia.

1. Definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son *similares* (o *semejantes*) si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que P es invertible y

$$P^{-1}AP = B.$$

En este caso escribimos $A \sim B$.

La relación de semejanza de matrices es una relación de equivalencia

2. Proposición. La relación de semananza de matrices es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. 1. Demostremos que $\sim$ es reflexiva. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces la igualdad $P^{-1}AP = A$ se cumple, por ejemplo, con $P = I_n$.

2. Propiedad simétrica. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \sim B$. Tenemos por demostrar que $B \sim A$. Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que P es invertible y $P^{-1}AP = B$. Pongamos $Q = P^{-1}$. Entonces Q es invertible y $Q^{-1} = P$. Además de la igualdad $P^{-1}AP = B$ obtenemos que $A = PBP^{-1}$, esto es, $A = Q^{-1}BQ$. Acabamos de demostrar que $B \sim A$.

3. Propiedad transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \sim B$ y $B \sim C$. Vamos a demostrar que $A \sim C$. Usando la definición de matrices similares encontremos matrices $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que P_1 y P_2 son invertibles, $B = P_1^{-1}AP_1$ y $C = P_2^{-1}BP_2$. Pongamos $P_3 = P_1P_2$. Siendo un producto de matrices invertibles la matriz P_3 es invertible, su inversa es $P_3^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$, y

$$C = P_2^{-1}BP_2 = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = P_3^{-1}AP_3,$$

lo cual significa que $A \sim C$. $\square$

Matrices similares y cambio de base

3. Cambio de la matriz asociada a un operador lineal al cambiar la base del espacio (repaso). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de V. Entonces las matrices asociadas $T_{\mathcal{A}}$ y $T_{\mathcal{B}}$ están relacionadas por la fórmula

$$T_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}},$$

por lo cual son semejantes: $T_{\mathcal{A}} \sim T_{\mathcal{B}}$.

4. Proposición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \sim B$. Entonces existe un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ y una base $\mathcal{U}$ del espacio $\mathbb{F}^n$ tales que $T_{\mathcal{E}} = A$ y $T_{\mathcal{U}} = B$, así que A y B son las matrices asociadas a un operador lineal respecto a dos bases.

Demostración. Definamos T por la fórmula $T(x) = Ax$. Entonces $T_{\mathcal{E}} = A$. Como $A \sim B$, existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Definimos los vectores $u_1, \ldots, u_n$ como las columnas de la matriz P:

$$u_k := P_{*,k} = \Big[P_{j,k} \Big]_{j=1}^{n} = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} e_j.$$

Entonces la lista $\mathcal{U} := (u_1, \ldots, u_n)$ es una base del espacio $\mathbb{F}^n$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = P$. Por lo tanto

$$T_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U},\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = P^{-1}AP = B. \qquad \square$$

Propiedades de matrices semejantes

5. Proposición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \sim B$. Entonces:

1. $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.
2. $\det(A) = \det(B)$.
3. A y B son ambas invertibles o ambas no invertibles.
4. Para cada $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda I_n - A \sim \lambda I_n - B$.
5. $\mathrm{C}_A = \mathrm{C}_B$.
6. $\operatorname{sp} A = \operatorname{sp} B$.

Demostración. Sea P una matriz invertible tal que $B = P^{-1}AP$.

1. Sabemos que el rango no se cambia al multiplicar por una matriz invertible (del lado izquierdo o del lado derecho).

2. Se sigue de la propiedad multiplicativa del determinante (además se usa la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{F}$):

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\
&= \det(P^{-1})\det(P)\det(A) = \det(I_n)\det(A) = \det(A).
\end{aligned}
$$

3. Se sigue del inciso 1 (o del inciso 2).

4. $P^{-1}(\lambda I_n - A)P = P^{-1}(\lambda I_n)P - P^{-1}AP = \lambda I_n - B$.

5 y 6. Se siguen de los incisos anteriores. $\square$