Propiedades de las operaciones algebraicas con números reales (repaso)

Objetivos. Repasar las propiedades principales de la adición y multiplicación de números reales. Repasar la definición de campo.

Requisitos. Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$.

Dos operaciones binarias en $\mathbb{R}$: adición y multiplicación

A cada par ordenado (a, b) de números reales le corresponde su *suma* denotada por $a+b$. Consideremos la función que convierte (a, b) en $a+b$. Esta función se llama la *adición* de números reales. El dominio de definición de esta función es $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todos los pares ordenados de números reales. El contradominio es $\mathbb{R}$. En esta situación se dice que $+$ es una *operación binaria* en $\mathbb{R}$ y se escribe que $+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

De manera similar, la *multiplicación* de números reales también es una operación binaria.

Es importante que los resultados de estas operaciones, es decir, la suma y el producto de números reales, también son números reales. Se dice que $\mathbb{R}$ es *cerrado* bajo la adición y la multiplicación.

Para comprender mejor la importancia de estas propiedades notemos que la substracción de números enteros positivos no es una operación binaria en $\{1, 2, 3, \ldots\}$. En efecto, al aplicar la substracción al par ordenado $(5, 9)$ ya salimos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. La división de números racionales tampoco es una operación binaria porque esta operación no se puede aplicar al par ordenado $(7, 0)$.

Propiedades de la adición de números reales

1. Propiedad asociativa de la adición de números reales.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

2. Propiedad conmutativa de la adición de números reales.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

3. Existencia de un número real neutro aditivo.

$$\exists \zeta \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha + \zeta = \alpha.$$

Se puede demostrar que el número con esta propiedad es único. Este elemento se llama *cero* y se denota por 0.

4. Existencia de un inverso aditivo para cualquier número real.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \exists \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha + \beta = 0.$$

Se puede demostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el número real β con la propiedad $\alpha + \beta = 0$ es único. Este número real se llama *inverso aditivo* (u *opuesto*) al número α y se denota por $-\alpha$.

Ejemplos de aplicación de propiedades de la adición

- Para escribir $a + b + c$ en forma $c + b + a$, aplicamos varias veces las propiedades asociativa y conmutativa:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &\overset{(1)}{=\!=} (b+a)+c \overset{(2)}{=\!=} b+(a+c) \\ &\overset{(3)}{=\!=} b+(c+a) \overset{(4)}{=\!=} (b+c)+a \overset{(5)}{=\!=} (c+b)+a.\end{aligned}$$

  En el paso (1) se aplica la propiedad conmutativa de la adición; en el paso (2) la propiedad asociativa. Justifique los pasos (3), (4) y (5).

- Resolviendo ecuaciones aplicamos frecuentemente la *ley de cancelación*:

$$\text{si} \quad a + c = b + c, \quad \text{entonces} \quad a = b.$$

  Esta ley se puede deducir de las propiedades mencionadas arriba:

$$\begin{aligned}a &\overset{(1)}{=\!=} a+0 \overset{(2)}{=\!=} a+(c+(-c)) \overset{(3)}{=\!=} (a+c)+(-c) \\ &\overset{(4)}{=\!=} (b+c)+(-c) \overset{(5)}{=\!=} b+(c+(-c)) \overset{(6)}{=\!=} b+0 \overset{(7)}{=\!=} b.\end{aligned}$$

  En el paso (4) se usa la hipótesis que $a + c = b + c$. Justifique los demás pasos.

Distributividad de la multiplicación respecto a la adición

5. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. Se tienen propiedades distributiva: la izquierda y la derecha.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma;$$
$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma;$$

Como la multiplicación de números reales es conmutativa (véase adelante la propiedad 7), es suficiente mencionar alguna de estas dos propiedades, y la otra se obtiene como un corolario.

Propiedades de la multiplicación de números reales

6. Propiedad asociativa de la multiplicación de números reales.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

7. Propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

8. Existencia de un número real neutro multiplicativo.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha\varepsilon = \alpha.$$

Se puede demostrar que el número ε con esta propiedad es único. Este elemento se llama *uno* y se denota por 1.

9. Uno es diferente de cero. $0 \neq 1$.

10. Existencia de un número real inverso para todo número real no nulo.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \exists \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha\beta = 1.$$

Se puede demostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ el número β con la propiedad $\alpha\beta = 1$ es único. Este número se llama el *inverso* (o *inverso multiplicativo*) del número α y se denota por α^{-1}.

Estas propiedades significan que $\mathbb{R}$ es un *campo* (algunos autores prefieren usar la palabra *cuerpo*). Formalmente, un campo es un conjunto con dos operaciones binarias (llamadas *adición* y *multiplicación*) que satisfacen las 9 propiedades escritas arriba. Mencionamos algunos otros campos importantes:

- El campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.
- El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos.
- El campo $\mathbb{F}_2$ de dos elementos $0, 1$ con operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$