Diagonalización de formas cuadráticas con el método matricial

Objetivos. Practicar el método matricial de diagonalización de formas cuadráticas.

Requisitos. Formas cuadráticas, cambio de base.

1. Ejemplo.

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3.$$

Solución. Con la matriz $Q_{\mathcal{E}}$ hacemos la operaciones por columnas y las operaciones por filas correspondientes, y con la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ sólo hacemos las operaciones por columnas.

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_3 \mathrel{+}= C_1]{C_2 \mathrel{+}= -2C_1} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \mathrel{+}= -3C_2} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ \hline 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Respuesta:

$$q_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}(1, -2, 9), \qquad \text{esto es,} \qquad q(x) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2,$$

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{esto es,} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & y_1 & - & 2y_2 & + & 7y_3, \\ x_2 & = & & & y_2 & - & 3y_3, \\ x_3 & = & & & & & y_3. \end{array}$$

Comprobación:

$$q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^t q_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, -2, 9).$$

□

2. Ejemplo.

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_3x_4.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \mathrel{+}= -C_1]{\substack{C_2 \mathrel{+}= -C_1 \\ C_3 \mathrel{+}= C_1}} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \mathrel{+}= C_3} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{C_3 \mathrel{+}= -\frac{1}{2}C_2 \\ C_4 \mathrel{+}= \frac{1}{2}C_2}} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_4 \mathrel{+}= C_3} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 2, -1/2, 0). \end{aligned}$$

□

3. Ejemplo.

$$q(x) = 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 3x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \mathrel{+}= -C_1]{\substack{C_2 \mathrel{+}= -C_1 \\ C_3 \mathrel{+}= -C_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \mathrel{+}= C_2]{C_3 \mathrel{+}= 2C_2} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Comprobación:

$$q_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, -1, 0, 0).$$

□

4. Ejemplo.

$$q(x) = 10x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \mathrel{+}= C_2} \left[\begin{array}{rrr} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{C_2 \mathrel{+}= -\frac{1}{2}C_1 \\ C_3 \mathrel{+}= \frac{1}{5}C_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & -1 & -2/5 \\ \hline 1 & -1/2 & 1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \mathrel{+}= -\frac{1}{5}C_2} \left[\begin{array}{rrr} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1/2 & 2/5 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2/5 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

5. Ejercicios.

1. $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$;
2. $q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 14x_2^2 - 48x_2x_3 + 45x_3^2$;
3. $q(x) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 18x_1x_3 + x_2^2 + 30x_2x_3 - 16x_3^2$;
4. $q(x) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2^2 + 24x_2x_3 + 11x_3^2$;
5. $q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 19x_2^2 + 30x_2x_3 - 20x_3^2$;
6. $q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 3x_3^2$.

6. Ejercicios.

1. $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;
2. $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 3x_4^2$;
3. $q(x) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_3x_4$;
4. $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$;
5. $q(x) = -x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4$;
6. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3^2 - 6x_3x_4 + 5x_4^2$.