Demostración del criterio de Sylvester de que una forma cuadrática es positiva definida

Objetivos. Demostrar el criterio de Sylvester de que una forma cuadrática es positiva definida (en otra terminología, que una forma cuadrática es *estrictamente positiva*).

Requisitos. Matriz de una forma cuadrática, método matricial de diagonalización de formas cuadráticas, menores principales y menores de esquina de una matriz cuadrada.

1. Lema (determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática estrictamente positiva). Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ tal que $q > 0$. Entonces $\det(q_{\mathcal{E}}) > 0$ para cualquier base $\mathcal{E}$ de V.

Demostración. Sabemos que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $q_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Como $q > 0$, todos los elementos de la diagonal de $q_{\mathcal{B}}$ son positivos, y

$$\det(q_{\mathcal{B}}) > 0.$$

Ahora recordamos la relación entre $q_{\mathcal{E}}$ y $q_{\mathcal{B}}$:

$$q_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}^{\top} q_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}.$$

Pasamos a los determinantes y usamos propiedades de los determinantes (determinante del producto, determinante de la matriz transpuesta):

$$\det(q_{\mathcal{E}}) = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}^{\top}) \det(q_{\mathcal{B}}) \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}) = \det(q_{\mathcal{B}}) \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}})^2 > 0. \qquad \square$$

2. Lema (matriz asociada a la forma cuadrática restringida a un subespacio). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Además, sea $\mathcal{E}' = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ una sublista de $\mathcal{E}$ ($i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$). Denotemos por S al subespacio generado por $\mathcal{E}'$ y por q' a la restricción de la función q al subespacio S:

$$S = \ell(\mathcal{E}'), \qquad q' = q|_{\mathcal{E}'}.$$

Entonces

$$q'|_{\mathcal{E}'} = (q|_{\mathcal{E}})_{\{i_1,\ldots,i_k\},\{i_1,\ldots,i_k\}},$$

esto es, la matriz asociada a q' con respecto a la base $\mathcal{E}'$ es la submatriz de la matriz asociada a q con respecto a la base $\mathcal{E}$, ubicada en la intersección de los renglones y columnas con índices $i_1, \ldots, i_r$.

3. Lema (método de Jacobi de diagonalización de una forma cuadrática). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top = A$. Entonces existen operaciones elementales de tipo $R_j += \alpha R_i$, $j > i$, con matrices elementales correspondientes $E_1, \ldots, E_m$, tales que

$$E_1 \ldots E_m A E_1^\top \ldots E_m^\top = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),$$

donde

$$d_k = \frac{\Delta_k(A)}{\Delta_{k-1}(A)} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aquí $\Delta_0(A) = 1$.

Idea de demostración. El algoritmo consiste en n pasos. En el k-ésimo paso la "submatriz de esquina" que ocupa los primeros k renglones y las primeras k columnas es diagonal y tiene elementos diagonales $d_1, \ldots, d_k$. Elegimos el (k,k)-ésimo elemento como pivote y aplicando operaciones elementales por renglones de tipo $R_j += \alpha R_k$, $j > k$ y las mismas operaciones elementales por columnas, $C_j += \alpha R_k$, eliminamos los demás elementos del k-ésimo renglón y de la k-ésima columna.

Hay que verificar que los elementos $d_1, \ldots, d_n$ son distintos de cero. En efecto, las operaciones elementales de los tipos $R_j += \alpha R_i$ y $C_j += \alpha C_i$, donde $j > i$, no cambian los valores de los menores de esquina. Por lo tanto, en el k-ésimo paso tenemos que

$$\Delta_k(A) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k.$$

De aquí concluimos que se cumplen las fórmulas para d_k y en particular que $d_k \neq 0$. $\square$

4. Teorema (criterio de Sylvester de forma cuadrática positiva definida). Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita n, $q \in \mathcal{Q}(V)$, $\mathcal{E}$ una base de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $q > 0$, esto es, $q(x) > 0$ para todo $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(b) todos los menores principales de $q_\mathcal{E}$ son positivos:

$$\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\} \qquad \delta_I(q_\mathcal{E}) > 0.$$

(c) todos los menores de esquina de la matriz $q_\mathcal{E}$ son positivos: para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\Delta_k(q_\mathcal{E}) > 0.$$

Esbozo de la demostración. Obviamente (b) implica (c).

(a)$\Rightarrow$(b). Sean $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Consideremos la restricción de q sobre el subespacio

$$S = \ell(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Por el lema 2 (de la matriz asociada a una restricción de una forma cuadrática),

$$(q|_S)_{\mathcal{E}'} = (q_{\mathcal{E}})_{\{i_1,\ldots,i_k\},\{i_1,\ldots,i_k\}},$$

así que $\det(q|_S) = \delta_{i_1,\ldots,i_k}(q_{\mathcal{E}})$. Como $q|_S > 0$, por el lema 1 (sobre el determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática estrictamente positiva) aplicado a $q|_S$ obtenemos que

$$0 < \det(q|_S)_{\mathcal{E}'} = \delta_{i_1,\ldots,i_k}(q_{\mathcal{E}}).$$

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que $\Delta_k(q_{\mathcal{E}}) > 0$ para todo k. Entonces por el lema 3 (método de diagonalización de Jabobi) la matriz $q_{\mathcal{E}}$ se puede transformar en una matriz diagonal

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

al aplicar sólo operaciones elementales por renglones de tipo $R_j + = \alpha R_i$ con $j > i$ y operaciones elementales por columnas correspondientes $C_j + = \alpha C_i$, y

$$d_k = \frac{\Delta_k(q_{\mathcal{E}})}{\Delta_{k-1}(q_{\mathcal{E}})} > 0.$$

La matriz D es la matriz asociada a q en una base nueva $\mathcal{B}$. Por un corolario del teorema sobre los índices de inercia, $\mathrm{r}_+(q) = n$, y $q > 0$. $\square$