Permutaciones

Problemas teóricos para examen

1. Escriba la definición de permutación.

2. Conjunto S_n y número de elementos de S_n. Denotemos por S_n al conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Explique por qué $|S_n| = n!$.

Composición de permutaciones

3. Escriba la definición del producto de dos permutaciones $\varphi, \psi \in S_n$.

4. Demuestre que la multiplicación de permutaciones es asociativa.

5. Definición de la permutación identidad.

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad e(i) := \underbrace{\qquad}_{?}.$$

6. Enuncie y demuestre las propiedades principales de la permutación identidad:

$$\forall \varphi \in S_n, \qquad \varphi e = \underbrace{\qquad}_{?};$$
$$\forall \varphi \in S_n, \qquad e\varphi = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

7. Tabla de multiplicación de las simetrías del triángulo regular. Para los elementos del conjunto S_3 usemos las siguientes notaciones:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Primero muestre que el producto rr verdaderamente coincide con la permutación que denotamos por r^2. Llene la tabla de multiplicación en S_3. En la intersección del renglón φ y de columna ψ se escribe el producto $\varphi\psi$.

e	r	r^2	h_1	h_2	h_3
r					
r^2					
h_1					
h_2					
h_3					

Observando esta tabla encuentre algunas leyes interesantes.

8. Para cualquier permutación existe una permutación inversa. Explique por qué para cualquier $\varphi \in S_n$ existe una $\psi \in S_n$ tal que $\varphi\psi = e$ y $\psi\varphi = e$. Explique con ejemplos cómo construir ψ.

9. Unicidad de la permutación inversa. Supongamos que $\varphi, \alpha, \beta \in S_n$,

$$\varphi\alpha = e, \qquad \alpha\varphi = e, \qquad \varphi\beta = e, \qquad \beta\varphi = e.$$

Demuestre que $\alpha = \beta$.

10. Definición de la permutación inversa. En los dos problemas anteriores se demuestra que para cualquier permutación $\varphi \in S_n$ existe una única permutación $\psi \in S_n$ tal que $\varphi\psi = e$ y $\psi\varphi = e$. Esta permutación se llama la *inversa* de φ y se denota por φ^{-1}.

11. Propiedades principales de la permutación inversa. Demuestre las siguientes propiedades:

- $e^{-1} = e$.
- Para cualesquiera $\varphi, \psi \in S_n$, $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$.
- Para cualesquiera $\varphi \in S_n$, $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

12. Sea $\psi \in S_n$. Demuestre que la función $f\colon S_n \to S_n$ definida mediante la siguiente regla es una biyección:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad f(\varphi) = \varphi\psi.$$

13. Sea $\psi \in S_n$. Demuestre que la función $f\colon S_n \to S_n$ definida mediante la siguiente regla es una biyección:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad f(\varphi) = \psi\varphi.$$

14. Para cada una de las permutaciones $\varphi \in S_3$ escriba la permutación φ^{-1}. Observe que las permutaciones φ^{-1} no se repiten y forman el conjunto S_3.

15. Demuestre que la función $\Xi\colon S_n \to S_n$ definida mediante la siguiente regla es una biyección:

$$\forall \varphi \in S_n \qquad \Xi(\varphi) = \varphi^{-1}.$$

Transposiciones

16. Definición de transposición. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. Denotemos por $\tau_{p,q}$ a la permutación que intercambia los elementos p y q y queda fijos todos los demás elementos. Se dice que $\tau_{p,q}$ es la *transposición* de p y q. Escriba la regla de correspondencia de $\tau_{p,q}$ de manera formal.

17. La inversa de una transposición. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. Muestre que $\tau_{p,q}\tau_{p,q} = e$, así que $\tau_{p,q}^{-1} = \tau_{p,q}$.

18. Multplicación por una transposición por la derecha. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$ y sea $\psi = \varphi\tau_{p,q}$. Explique cómo obtener la lista $\psi(1), \ldots, \psi(n)$ de la lista $a_1, \ldots, a_n$.

19. Multiplicación por una transposición por la izquierda. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$ y sea $\psi = \tau_{p,q}\varphi$. Explique cómo obtener la lista $\psi(1), \ldots, \psi(n)$ de la lista $a_1, \ldots, a_n$.

Ciclos

20. Escriba de manera formal la regla de correspondencia del ciclo $\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_r)$.

21. El ciclo $\mathrm{c}_8(4, 7, 5, 6, 1)$ también se puede escribir como $\mathrm{c}_8(7, 5, 6, 1, 4)$ y de tres otras maneras (usando la misma notación cíclica). ¿De cuántas maneras se puede escribir (en notación cíclica) un ciclo de r elementos?.

22. Unión de dos ciclos que tienen un elemento en común. Enuncie y explique (al menos con un ejemplo) la fórmula para el siguiente producto:

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(a_p, \ldots, a_q),$$

donde $a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q$ son algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares.

23. Corolario. Calcule el siguiente producto:

$$\mathrm{c}_n(a_1, a_2)\, \mathrm{c}_n(a_2, a_3) \cdots \mathrm{c}_n(a_{p-2}, a_{p-1})\, \mathrm{c}_n(a_{p-1}, a_p),$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares.

24. Unión de un ciclo con una transposición que tiene un elemento del ciclo. Enuncie y explique (al menos con un ejemplo) la fórmula para el siguiente producto:

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(a_p, a_{p+1}),$$

donde $a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}$ son algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares.

25. Multiplicación de un ciclo por una transposición de dos elementos del ciclo. Enuncie y explique (al menos con un ejemplo) la fórmula para el siguiente producto:

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q)\, \mathrm{c}_n(a_p, a_q),$$

donde $a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q$ son algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares.

Descomposición de una permutación en un producto de ciclos disjuntos

26. Ciclos disjuntos conmutan. Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ algunos elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares. Explique por qué se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(b_1, \ldots, b_q) = \mathrm{c}_n(b_1, \ldots, b_q)\, \mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p).$$

27. Explique a alguien cómo descomponer la siguiente permutación en un producto de ciclos disjuntos:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

28. Muestre con un ejemplo que la descomposición de una permutación en un producto de ciclos disjuntos se puede escribir de varias maneras y explique en qué sentido dicha descomposición es única.

29. Descomposición de un ciclo en un producto de transposiciones. Consideremos un ciclo de r elementos:

$$\varphi = \mathrm{c}_n(a_1, a_2, \ldots, a_r).$$

Muestre que este ciclo se puede escribir como un producto de $r - 1$ transposiciones.

Decremento de una permutación

30. Definición (decremento o discriminante de una permutación). Sea φ una permutación. Denotemos por $r_1, \ldots, r_s$ a las longitudes de los ciclos en la descomposición de φ en ciclos disjuntos. Entonces el siguiente número se llama el *decremento* o el *discriminante* de φ:

$$\mathrm{d}(\varphi) := (r_1 - 1) + \cdots + (r_s - 1).$$

Tomando en cuenta que $r_1 + \cdots + r_s = n$ podemos escribir $\mathrm{d}(\varphi)$ como

$$\mathrm{d}(\varphi) = n - s.$$

En la última fórmula s es la cantidad de los ciclos en la descomposición de φ, tomando en cuenta los ciclos triviales (ciclos de un elemento).

31. Teorema sobre la descomposición de una permutación en un producto de transposiciones. Demuestre que cualquier permutación $\varphi \in S_n$ se puede descomponer en un producto de $\mathrm{d}(\varphi)$ transposiciones.

32. Teorema sobre el cambio del decremento de una permutación al multiplicarla por una transposición. Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ con $p \neq q$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q}) = \begin{cases} \mathrm{d}(\varphi) - 1, & \text{si } p \text{ y } q \text{ pertenecen a un ciclo en la descomposición de } \varphi; \\ \mathrm{d}(\varphi) + 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Muestre con ejemplos cómo funciona esta fórmula.

33. Tarea adicional. Escriba demostraciones formales para ambos casos del teorema anterior.

34. Corolario. Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ con $p \neq q$. Entonces

$$(-1)^{\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q})} = -(-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}.$$

35. Corolario. Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ con $p \neq q$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q}) \leq \mathrm{d}(\varphi) + 1.$$

36. Proposición (sobre el decremento del producto de k transposiciones). Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algunas transposiciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Demuestre que

$$\mathrm{d}(\alpha_1 \cdots \alpha_k) \leq k.$$

37. Sea $\varphi \in S_n$. Explique por qué φ no se puede descomponer en un producto de k transposiciones con $k < \mathrm{d}(\varphi)$.

38. Sea $\varphi \in S_n$ una permutación que se puede escribir como un producto de k transposiciones. Demuestre que φ se puede escribir también como un producto de $k+2$ transposiciones.

39. Sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que $\mathrm{d}(\varphi)$ es el número mínimo de factores en las descomposiciones de φ en ciclos disjuntos.

40. Ejemplo. Calcule el decremento de la siguiente permutación:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicación: considere cuatro casos $n = 4m$, $n = 4m+1$, $n = 4m+2$, $n = 4m+3$; en cada caso saque la descomposición de φ en ciclos disjuntos.

Signo de una permutación

41. Definición (el signo de una permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi) \coloneqq (-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}.$$

42. Calcule el signo de e, el signo de $\tau_{i,j}$, el signo de $\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_r)$.

43. Calcule el signo de la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

44. Proposición (cambio del signo de una permutación al multiplicarla por una transposición). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $p \neq q$. Explique por qué

$$\operatorname{sgn}(\varphi \tau_{p,q}) = -\operatorname{sgn}(\varphi).$$

45. Proposición (sobre el signo de una permutación representada como un producto de transposiciones). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algunas transposiciones tales que $\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_k$. Demuestre que $\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^k$.

46. Teorema sobre el signo del producto de dos permutaciones. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = \operatorname{sgn}(\varphi) \operatorname{sgn}(\psi).$$

47. Signo de la permutación inversa. Sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que

$$\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi).$$

48. Ejemplo. Muestre que

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Indicación: use el resultado del Problema 40.

Subgrupo alternado

49. Notación $\boldsymbol{A_n}$. Denotemos por A_n al conjunto de todas las permutaciones pares del conjunto $\{1,\ldots,n\}$:

$$A_n \coloneqq \big\{\varphi \in S_n\colon\ \ \operatorname{sgn}(\varphi) = 1\big\}.$$

50. Escriba todos los elementos de S_2.

51. Escriba todos los elementos de S_3.

52. Escriba todos los elementos de S_4.

53. Las permutaciones pares forman un subgrupo de $\boldsymbol{S_n}$. Muestre las siguientes propiedades de A_n:

1. Si $\varphi,\psi \in A_n$, entonces $\varphi\psi \in A_n$.
2. $e \in A_n$.
3. Si $\varphi \in A_n$, entonces $\varphi^{-1} \in A_n$.

Estas propiedades significan que A_n es un subgrupo de S_n. Este subgrupo se llama el *subgrupo alternado*. Otros terminos comunes son: *subgrupo alternante*, *grupo alternado*, *grupo alternante*.

54. Multiplicación de todas las permutaciones pares por una permutación impar. Sea $n \geq 2$ y sea $\psi \in S_n$ una permutación impar. Se considera el mapeo $\Lambda\colon A_n \to S_n$, definido mediante la regla

$$\Lambda(\varphi) \coloneqq \varphi\psi \qquad \forall \varphi \in A_n.$$

Muestre que Λ es inyectivo y que su imagen es $S_n \setminus A_n$.

55. Número de elementos de $\boldsymbol{A_n}$. Sea $n \geq 2$. Usando el problema anterior muestre que

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Funciones simétricas y antisimétricas

56. Dé un ejemplo de una función antisimétrica $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que no sea constante cero.

57. Definición (aplicación de una permutación a los argumentos de una función). Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos y sea $\varphi \in S_n$. Denotemos por φf a la función $X^n \to \mathbb{F}$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$(\varphi f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(n)}).$$

58. Aplicación de dos permutaciones a los argumentos de una función. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos y sean $\varphi, \psi \in S_n$. Enuncie y demuestre una fórmula para $\varphi(\psi f)$.

59. Definición (función simétrica). Una función $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ se llama *simétrica* si su valor no se cambia al intercambiar cualesquiera dos de sus argumentos. Escriba esta definición de manera formal usando la notación $\tau_{p,q}$.

60. Aplicación de una permutación a los argumentos de una función simétrica. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función simétrica y sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que

$$\psi f = f.$$

61. Definición (función antisimétrica). Una función $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ se llama *antisimétrica* si cambia el signo al intercambiar cualesquiera dos de sus argumentos:

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in X \qquad \forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \text{ con } p < q,$$
$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_{p-1}, &a_q, a_{p+1}, \ldots, a_{q-1}, a_p, a_{q+1}, \ldots, a_n) \\ &= -f(a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{q-1}, a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Escriba esta definición de manera formal usando la notación $\tau_{p,q}$.

62. Teorema: aplicación de una permutación a los argumentos de una función antisimétrica. Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función antisimétrica y sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que

$$\psi f = \operatorname{sgn}(\psi) f.$$

63. Sea $f\colon X^5 \to \mathbb{F}$ una función antisimétrica. Exprese $f(x_4, x_2, x_1, x_5, x_3)$ a través de $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

64. Descomposición de una función real de dos argumentos en una suma de una función simétrica y una función antisimétrica. Sea $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos argumentos. Demuestre que existe un único par de funciones (g, h) tales que $g\colon X^2 \to \mathbb{R}$, $h\colon X^2 \to \mathbb{R}$, $f = g + h$, g es simétrica y h es antisimétrica:

$$g(y, x) = g(x, y) \quad \forall x, y \in X; \qquad h(y, x) = -h(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$