Valores y vectores propios

Problemas teóricos

El los siguientes problemas se denota por $\mathcal{L}(V)$ conjunto de los operadores lineales en un espacio vectorial V (en otras palabras, de las transformaciones lineales $V \to V$). En la mayoría de los ejercicios se supone que V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$. El caso principal es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Agradezco a Gustavo Antonio Sandoval Angeles por componer algunos problemas.

Criterios de invertibilidad de un operador lineal

1. Determinante de la matriz asociada a un operador lineal no depende de base (repaso). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases del espacio V. Demuestre que

$$\det(T_{\mathcal{A}}) = \det(T_{\mathcal{B}}).$$

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Escriba la definición de $\det(T)$. Explique por qué la definición es correcta.

3. Relación entre la nulidad y el rango de un operador lineal (repaso). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Calcule

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)).$$

4. Criterio de la invertibilidad de un operador lineal en términos de su matriz asociada (repaso). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Demuestre que T es invertible si y sólo si la matriz asociada $T_{\mathcal{B}}$ es invertible.

5. Criterio de la invertibilidad de un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita (repaso). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es invertible.

(b) T es inyectiva, lo que es equivalente a la igualdad $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(c) T es suprayectiva, es decir $\operatorname{im}(T) = V$.

(d) $\det(T) \neq 0$.

Polinomio característico

6. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Demuestre que

$$(\lambda I - T)_{\mathcal{B}} = \lambda I_n - T_{\mathcal{B}}.$$

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que el polinomio $\det(\lambda I_n - T_{\mathcal{B}})$ no depende de la base $\mathcal{B}$.

8. Definición del polinomio característico. Escriba la definición del polinomio característico de un operador lineal que actúa en un espacio vectorial de dimensión finita. Explique por qué la definición es correcta.

9. Polinomio característico de una matriz triangular. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) \cup \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$, es decir, sea A una matriz triangular superior o inferior. Calcule C_A.

10. Polinomio característico de la matriz transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $\mathrm{C}_{A^\top} = \mathrm{C}_A$.

11. Polinomio característico de una matriz de orden 2 con entradas generales. Calcule C_A, donde A es una matriz de orden 2 con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

12. El grado del polinomio característico. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que C_A es un polinomio de grado n.

13. Fórmulas para algunos coeficientes del polinomio característico. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Denotemos los coeficientes del polinomio característico C_A por $c_0, \ldots, c_n$:

$$\mathrm{C}_A(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

Demuestre que:

1. $c_n = 1$, es decir, C_A es un polinomio mónico.
2. $c_0 = (-1)^n \det(A)$.

Espectro, valores propios y polinomio característico

14. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$u \in \ker(\lambda I - T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Tu = \lambda u.$$

15. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\ker(\lambda I - T) = \ker(T - \lambda I).$$

16. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) λ es un valor propio de T, o sea existe un vector $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $Tv = \lambda v$.

(b) $\ker(\lambda I - T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

17. Teorema (varias descripciones del espectro de un operador lineal en un espacio de dimensión finita). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) El operador $\lambda I - T$ no es invertible.

(b) λ es un valor propio de T.

(c) $\mathrm{r}(\lambda I - T) < n$.

(d) $\mathrm{C}_T(\lambda) = 0$.

18. Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces los siguientes conjuntos son iguales:

- El espectro $\mathrm{sp}(T)$ de T.
- El conjunto de los valores propios de T.
- El conjunto de las raíces del polinomio característico C_T, pertenecientes a $\mathbb{F}$.

19. Criterio de la invertibilidad de un operador lineal en términos de su espectro. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que:

$$T \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \notin \mathrm{sp}(T).$$

20. Criterio de la invertibilidad de un operador lineal en términos de su polinomio característico. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que:

$$T \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{C}_T(0) \neq 0.$$

21. Ejemplo, cuando el espectro depende del campo. Calcule C_A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere A como una matriz real, calcule las raíces reales de C_A, los valores propios (reales) de A y los vectores propios correspondientes. Luego considere A como una matriz compleja, calcule las raíces complejas de C_A, los valores propios (complejos) de A y los vectores propios correspondientes.

22. Espectro de una matriz triangular. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) \cup \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$, es decir, sea A una matriz triangular superior o inferior. Calcule $\mathrm{sp}(A)$.

23. Espectro de la matriz transpuesta, a través del polinomio característico. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $\mathrm{sp}(A^\top) = \mathrm{sp}(A)$ usando la fórmula $\mathrm{C}_{A^\top} = \mathrm{C}_A$.

24. Espectro de la matriz transpuesta, a través de la matriz inversa. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $\mathrm{sp}(A^\top) = \mathrm{sp}(A)$ usando la definición de la matriz inversa y las propiedades de la matriz transpuesta.

25. Ejemplo de una matriz real sin valores propios reales. Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que no tenga valores propios reales.

26. Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $A^3 \neq \mathbf{0}$ pero el único valor propio real de A es 0.

27. Criterio de operador con espectro unipuntual en un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\mathrm{sp}(T) = \{\lambda_0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{C}_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n.$$

28. Calcule el espectro de la siguiente matriz $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \Big(1 - \delta_{i,j}\Big)_{i,j=1}^{n}.$$

Indicación: considere el caso $n = 4$ pero de tal manera que la solución se pueda generalizar fácilmente al caso de n arbitrario.

29. La traza de una matriz es la suma de sus valores propios. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que su polinomio característico se factoriza en factores lineales sobre el campo $\mathbb{F}$ (por ejemplo, esto siempre se cumple si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$):

$$\mathrm{C}_A(x) = (x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_n).$$

Note que $d_1, \ldots, d_n$ son los valores propios de A contados con las multiplicidades algebraicas. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \mathrm{tr}(A), \qquad \prod_{k=1}^{n} d_k = \det(A).$$

Sugerencia: calcule los coeficientes de x^{n-1} y x^0 en el polinomio característico de A.

30. Ejemplo: espectro de la matriz de rotación. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número fijo. Consideramos la matriz R_θ:

$$R_\theta \coloneqq \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

I. R_θ es una matriz real. Calcule su espectro sobre el campo $\mathbb{R}$.

II. R_θ se puede tratar como una matriz compleja. Calcule sus valores y vectores propios sobre el campo $\mathbb{C}$.

31. Ejemplo: espectro de la matriz de reflexión respecto al eje de abscisas. Calcule los valores y vectores propios de la siguiente matriz H. Determine si H es diagonalizable o no. Calcule su polinomio mínimo.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

32. Ejemplo. Calcule los valores y vectores propios de la siguiente matriz A. Determine cuándo A es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Independencia lineal de subespacios (tema auxiliar)

33. Definición (subespacios linealmente independientes). Sean $W_1, \ldots, W_m$ subespacios de un espacio vectorial V. ¿Cuándo se dice que $W_1, \ldots, W_m$ son linealmente independientes?.

34. Tarea adicional (criterio de independencia lineal de subespacios). Sean $W_1, \ldots, W_m$ subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $W_1, \ldots, W_m$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \qquad W_i \cap \left(\sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne i}} W_j \right) = \{\mathbf{0}\}.$$

35. Criterio de suma directa en términos de subespacios linealmente independientes. Sean $W_1, \ldots, W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. Denotemos al subespacio $W_1 + \ldots + W_k$ por X. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es suma directa de $W_1, \ldots, W_k$.

(b) $W_1, \ldots, W_k$ son linealmente independientes.

36. Construcción de una base en la suma de subespacios linealmente independientes. Sean $W_1, \ldots, W_m$ subespacios linealmente independientes de un espacio vectorial V de dimensión finita, y sean $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ bases de $W_1, \ldots, W_m$ respectivamente. Denotemos por $\mathcal{U}$ a la lista de vectores que se obtiene al concatenar las listas $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$. Demuestre que $\mathcal{U}$ es una base de $W_1, \ldots, W_m$.

Independencia lineal de subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios

37. Teorema de la independencia lineal de subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diferentes valores propios de T. Sean $W_k \coloneqq \ker(\lambda_k I - T)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Demuestre que si $w_k \in W_k$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, y

$$\sum_{k=1}^{m} w_k = \mathbf{0},$$

entonces $w_k = \mathbf{0}$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$.

38. Independencia lineal de vectores propios correspondientes a diferentes valores propios. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diferentes valores propios de T. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ sea u_k un valor propio correspondiente a λ_k, esto es, $u_k \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $Tu_k = \lambda_k u_k$. Demuestre que los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente independientes.

Subespacios invariantes

39. Sean V un espacio vectorial, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $W < \ker(T)$. Demuestre que W es un subespacio invariante de T.

40. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que los operadores lineales T y $\lambda I - T$ tienen los mismos subespacios invariantes.

41. Proposición: subespacio propio es un subespacio invariante. Sean V un espacio vectorial, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. Demuestre que $W \coloneqq \ker(\lambda I - T)$ es un subespacio invariante de T.

42. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, W un subespacio invariante de T. Denotemos por S a la compresión del operador T al subespacio W:

$$S\colon W \to W, \qquad \forall w \in W \quad S(w) = T(w).$$

Demuestre que el polinomio característico de S divide al polinomio característico de T:

$$\mathrm{C}_S \mid \mathrm{C}_T\,.$$

Multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio

43. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. Escriba la definición de la multiplicidad algebraica de λ.

44. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. Escriba la definición de la multiplicidad geométrica de λ.

45. Teorema de las multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$, sea $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y sea k la multiplicidad algebraica de λ. Demuestre que

$$\dim(\ker(\lambda I - T)) \le k.$$

Polinomios de un operador lineal

46. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ el polinomio definido por la fórmula $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$, sea V un espacio vectorial real y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $f(T) = \mathbf{0}$. Demuestre que T es invertible. Sugerencia: encuentre un operador lineal $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

47. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, λ un valor propio de T y $u \in \ker(\lambda I - T)$. Demuestre por inducción que $T^k u = \lambda^k u$.

48. Vectores propios y polinomios de operadores lineales. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, λ un valor propio de T y $u \in \ker(\lambda I - T)$. Además sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Calcule $P(T)u$.

Teorema del mapeo del espectro (en el caso polinomial)

49. Teorema del mapeo del espectro. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(f(T)) = f(\operatorname{sp}(T)).$$

50. Espectro de un operador nilpotente. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^k = \mathbf{0}$ para algún k. Demuestre que $\operatorname{sp}(T) = \{0\}$.

51. Espectro de una proyección. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Demuestre que $\operatorname{sp}(P) \subseteq \{0, 1\}$.

52. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que $A^2 = I$. Escriba todas las opciones posibles para el conjunto $\operatorname{sp}(A)$. Para cada una de esas opciones construya una matriz A que realice esta opción.

53. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz con n valores propios diferentes: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

54. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz con n valores propios diferentes: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Encuentre una fórmula simple para calcular

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k).$$

El siguiente ejercicio se resuelve *sin* usar el teorema del mapeo del espectro.

55. Espectro del operador inverso. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal invertible con $\operatorname{sp}(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k} \right\}.$$

Teorema de Cayley–Hamilton

56. Ejemplo que muestra la idea de la demostración del teorema de Cayley–Hamilton. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcule las matrices con entradas polinomiales

$$P(x) = xI - A, \qquad Q(x) = \operatorname{adj}(xI - A),$$

escríbalas como polinomios con coeficientes matriciales y calcule el producto $P(x)Q(x)$.

57. Sean P y Q polinomios con coeficientes matriciales:

$$P(x) = P_0 + P_1 x + \ldots + P_m x^m, \qquad Q(x) = Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_s x^s,$$

donde $P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz que conmuta con todos los coeficientes del polinomio Q:

$$\forall j \in \{0, \ldots, s\} \qquad AQ_j = Q_j A.$$

Demuestre que

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

58. Teorema de Cayley–Hamilton. Escriba el enunciado y la demostración. Se recomienda aplicar el resultado del ejercicio anterior a los polinomios con coeficientes matriciales

$$P(x) = -A + Ix, \qquad Q(x) = \operatorname{adj}(xI - A).$$

Polinomios anuladores de un operador lineal

59. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que los polinomios anuladores de T forman un ideal en $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

60. Enuncie el teorema de Cayley–Hamilton usando el término *polinomio anulador*.

61. Polinomios anuladores de la matriz transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que cualquier polinomio anulador de A es también polinomio anulador de $A^\top$, y vice versa. En otras palabras, demuestre que el ideales de los anuladores de A es igual con el ideal de los anuladores de $A^\top$:

$$\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\colon\ f(A) = \mathbf{0}\} = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\colon\ f(A^\top) = \mathbf{0}\}.$$

Polinomio mínimo de un operador lineal

62. Teorema: cada ideal no trivial de polinomios de una variable está generado por un único polinomio mónico. Sea J un ideal no trivial de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Demuestre que existe un único polinomio mónico $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que J está generado por g, esto es,

$$J = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \colon\ g \mid f \big\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ es un anillo de ideales principales.

63. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Escriba la definición del polinomio mínimo de T.

64. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que el polinomio mínimo de T divide al polinomio característico de T.

65. Teorema de las raíces del polinomio mínimo. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que el polinomio característico de T y el polinomio mínimo de T tienen las mismas raíces.

66. Criterio de la invertibilidad de un operador lineal en términos de su polinomio mínimo. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$T \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_T(0) \neq 0.$$

67. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Halle C_A si $\mu_A(x) = (x+7)^2$.

68. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Escriba todas las formas posibles del polinomio mínimo de A el polinomio característico de A es $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)^2(\lambda-4)^2$.

69. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Escriba todas las formas posibles del polinomio mínimo de A si $\mathrm{sp}(A) = \{-3, 4\}$.

70. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Escriba todas las formas posibles del polinomio característico de A si el polinomio mínimo de A es $(x+4)(x-3)$.

71. Dada la matriz diagonal A, encuentre su polinomio mínimo y haga la comprobación:

$$A = \mathrm{diag}(4, -3, -3).$$

72. Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, encuentre su polinomio mínimo y haga la comprobación:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

73. Polinomio mínimo de la matriz transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que el polinomio mínimo de A es igual con el polinomio mínimo de $A^\top$.

Operadores lineales diagonalizables

74. Criterio para que la matriz asociada a un operador lineal sea diagonal. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es diagonal;

(b) los elementos de $\mathcal{B}$ son vectores propios de T.

75. Teorema (criterio para que un operador lineal sea diagonalizable). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Enuncie y demuestre el criterio para que T sea diagonalizable.

76. Definición (matrices similares). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son *similares* (o *semejantes*) y se escribe $A \sim B$ si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Demuestre que esta relación binaria es una relación de equivalencia.

77. Propiedades de matrices similares. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $A \sim B$. Demuestre que:

- $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$.
- $\det(B) = \det(A)$.
- $\operatorname{r}(B) = \operatorname{r}(A)$.
- Si A es invertible, entonces B también es invertible.
- $\mathrm{C}_B = \mathrm{C}_A$.
- $\operatorname{sp}(B) = \operatorname{sp}(A)$.

78. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable cuyo espectro consiste en un sólo elemento. Demuestre que A es escalar, es decir, existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $A = \alpha I_n$.

79. Sea A una matriz estrictamente triangular superior de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que si A es diagonalizable, entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$, esto es, $A = \mathbf{0}$.

80. Sea A una matriz triangular superior de orden 3 con todas entradas diagonales iguales a 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que si A es diagonalizable, entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$, esto es, $A = I_3$.

Exponencial de una matriz.
Exponencial de matrices diagonalizables

81. Definición del límite de una sucesión de matrices. Sea $(A^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de matrices pertenecientes a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se escribe

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = B$$

si para todo par de índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{k\to\infty} A_{i,j}^{(k)} = B_{i,j}.$$

82. Definición de la exponencial de una matriz cuadrada. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Escriba la definición de $\exp(A)$.

83. Exponencial de una matriz diagonal. Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonal con entradas diagonales $d_1, \ldots, d_n$:

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Basándose en la definición de la función exponencial (como serie) y propiedades de matrices diagonales demuestre que

$$\exp(D) = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{d_1}, \ldots, \mathrm{e}^{d_n}).$$

84. Cálculo de la exponencial de una matriz diagonalizable. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable y sean P una matriz invertible y D una matriz diagonal tales que

$$P^{-1}AP = D.$$

Deduzca una fórmula para $\exp(A)$.