Forma canónica de Jordan

Problemas teóricos

Proyecciones

(Este tema es auxiliar para la forma canónica de Jordan.)

1. Sean $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{L}(V)$,

$$\sum_{j=1}^{m} P_j = I, \qquad P_j P_k = \mathbf{0} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, m\},\ j \neq k.$$

Demuestre que $P_j^2 = P_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ y que el espacio V es suma directa de $\operatorname{im}(P_1), \ldots, \operatorname{im}(P_m)$:

$$V = \operatorname{im}(P_1) \dotplus \ldots \dotplus \operatorname{im}(P_m).$$

Teorema de la descomposición primaria

2. Enuncie el teorema de la descomposición primaria.

Operadores lineales nilpotentes

Resuelve los ejercicios de esta sección sin usar la forma canónica de Jordan.

3. Escriba la definición de *operador lineal nilpotente*.

4. Escriba la definición del *índice de nilpotencia* de un operador lineal nilpotente.

5. Criterios de operador nilpotente en un espacio de dimensión finita, en términos de su polinomio mínimo. Sean $\mathbb{F}$ un campo (puede ser un campo algebraicamente no cerrado), V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita n, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p \in \{1, 2, \ldots\}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es nilpotente con índice de nilpotencia p.

(b) $\mu_T(x) = x^p$.

6. Criterio de operador nilpotente en un espacio de dimensión finita, en términos de su polinomio característico. Sean $\mathbb{F}$ un campo (puede ser un campo algebraicamente no cerrado), V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita n, $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es nilpotente.

(b) $\mathrm{C}_T(x) = x^n$.

7. Sean $\mathbb{F}$ un campo (puede ser un campo algebraicamente no cerrado), V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita n y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente. Demuestre que $T^n = \mathbf{0}_{\times n,n}$, así que el índice de nilpotencia de T es menor o igual a su orden n.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente con índice nilpotencia igual a 7, esto es, $A^6 \neq \mathbf{0}$ y $A^7 = \mathbf{0}$. Demuestre que no existe matriz $B \in \mathcal{M}_7(\mathbb{F})$ tal que $B^2 = A$.

9. Criterio de operador lineal nilpotente en un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es nilpotente;

(b) $\mathrm{sp}(T) = \{0\}$.

10. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal de rango uno, es decir, $\dim(\mathrm{im}(T)) = 1$. Demuestre que se tiene uno y sólo uno de los siguientes dos casos:

1) T es diagonalizable o 2) T es nilpotente.

11. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ matrices nilpotentes tales que $AB = BA$. Demuestre que $A + B$ es nilpotente.

12. Dé un ejemplo de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que A y B son nilpotentes pero $A + B$ no es nilpotente.

13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz nilpotente, $A^p = \mathbf{0}$. Demuestre que $I - A$ es invertible y construya su inversa. Sugerencia: recuerde la fórmula para $(1-z)(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^m)$.

14. Toda matriz cuadrada estrictamente triangular superior es nilpotente. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz *estrictamente triangular superior*, es decir,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \Big((i \geq j) \quad \Longrightarrow \quad (A_{i,j} = 0) \Big).$$

Demuestre que A es nilpotente.

15. Toda matriz cuadrada estrictamente triangular inferior es nilpotente. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz *estrictamente triangular inferior*, es decir,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \Big((i \leq j) \quad \Longrightarrow \quad (A_{i,j} = 0) \Big).$$

Demuestre que A es nilpotente.

Bloques de Jordan

16. Escriba la definición formal del bloque de Jordan $J_m(\lambda)$ usando el símbolo de Kronecker.

17. Calcule los valores y vectores propios del bloque de Jordan $J_2(\lambda)$. Demuestre que la matriz $J_2(\lambda)$ no es diagonalizable.

18. Calcule $(J_4(0))^k$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

19. Escriba las matrices $(J_m(0))^k$ para $m = 2, 3, 4$, $k = 2, 3, 4$.

20. Calcule el rango de la matriz $(J_m(0))^k$.

21. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre que la matriz $(J_m(\lambda))^k$ es invertible. Calcule su rango.

22. Calcule $(J_3(\lambda))^k$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

23. Teorema: Polinomio de un bloque de Jordan. Enuncie y demuestre la fórmula general para $f(J_m(\lambda))$, donde $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

24. Calcule $(J_4(\lambda))^6$.

25. Exponencial de un bloque de Jordan de orden 2. Calcule $\exp(tJ_2(\lambda))$.

26. Exponencial de un bloque de Jordan de orden 3. Calcule $\exp(tJ_3(\lambda))$.

Matrices de Jordan

27. Sea $A = \operatorname{diag}(J_3(-7), J_2(-7), J_2(-7), J_3(\mathrm{i}), J_3(\mathrm{i}), J_1(\mathrm{i}))$. Escriba el polinomio característico y el polinomio mínimo de A.

28. Polinomio mínimo de una matriz de Jordan. Sea A una matriz de Jordan compleja. Enuncie la fórmula para su polinomio mínimo.

29. Escriba todas las matrices de Jordan (matrices diagonales por bloques cuyos bloques son de Jordan) que cumplen con las siguientes propiedades:

1) tienen polinomio característico $(\lambda+5)^3(\lambda-2)^5$ y polinomio mínimo $(\lambda+5)^2(\lambda-2)^3$;
2) las entradas diagonales no decrecen y entre bloques de Jordan con la mista entrada diagonal primero van los bloques de mayor orden.

30. Escriba todas las matrices de Jordan (matrices diagonales por bloques cuyos bloques son de Jordan) que cumplen con las siguientes propiedades:

1) tienen polinomio característico $(\lambda-1)^2(\lambda-5)^4$ y polinomio mínimo $(\lambda-1)^2(\lambda-5)^2$;
2) las entradas diagonales no decrecen y entre bloques de Jordan con la misma entrada diagonal primero van los bloques de mayor orden.

31. Escriba todas las matrices de Jordan (matrices diagonales por bloques cuyos bloques son de Jordan) que cumplen con las siguientes propiedades:

1) tienen polinomio característico $(\lambda-1)^3(\lambda+4)^5$ y polinomio mínimo $(\lambda-1)(\lambda+4)^3$;
2) las entradas diagonales no decrecen y entre bloques de Jordan con la misma entrada diagonal primero van los bloques de mayor orden.

Unicidad de la forma canónica de Jordan

32. Sea A una matriz de Jordan que tiene n_1 bloques $J_1(0)$, n_2 bloques $J_2(0)$, n_3 bloques $J_3(0)$ y algunos bloques con entradas diagonales distintas de 0 que en total ocupan m renglones. Calcule el rango de la matriz A^k.

33. Sea A una matriz de Jordan de orden n que tiene n_1 bloques $J_1(\lambda_0)$, n_2 bloques $J_2(\lambda_0)$, n_3 bloques $J_3(\lambda_0)$ y algunos bloques con entradas diagonales distintas de λ_0 que en total ocupan m renglones. Calcule el rango de la matriz $(A - \lambda_0 I_n)^k$.

34. Sea A una matriz de Jordan de orden n. Para todo $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ denotemos por n_s al número de los bloques de Jordan $J_s(0)$ en la matriz A. Además denotemos por m al número de los renglones que tienen entradas diagonales distintas de 0. Calcule el rango de la matriz A^k.

35. Teorema: unicidad de la forma canónica de Jordan de operador lineal y fórmula para calcular los números de los bloques de Jordan de cada tamaño. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Para todo $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y todo $s \in \{1, 2, \ldots\}$ denotemos por $n_s(\lambda)$ al número de los bloques de Jordan $J_s(\lambda)$ en la matriz $T_{\mathcal{B}}$. Exprese $n_s(\lambda)$ a través de los rangos de $(T - \lambda I)^k$ para ciertos k. Haga la conclusión acerca de la unicidad de la forma canónica de Jordan.

36. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\operatorname{im}(T^6) = \operatorname{im}(T^5)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T^7) = \operatorname{im}(T^6)$.

37. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tales que $\operatorname{im}(T^{k+1}) = \operatorname{im}(T^k)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T^{k+2}) = \operatorname{im}(T^{k+1})$.

38. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tales que $\operatorname{im}(T^{k+1}) = \operatorname{im}(T^k)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T^j) = \operatorname{im}(T^k)$ para todo j entero tal que $j \geq k$.