Cálculo de las potencias de matrices usando sus valores propios

Objetivos. Aprender a calcular potencias de matrices usando sus valores propios.

Requisitos. Matriz, valor propio, potencias de una matriz.

1. Ejemplo (cálculo de las potencias de una matriz usando su descomposición espectral). Calcular A^n, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

Después de calcular los vectores propios de A vemos que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{donde} \quad D = \operatorname{diag}(2,5), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n & 5^n - 2^n \\ 5\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 5^{n+1} & 5^{n+1} - 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

2. Ejemplo (cálculo de las potencias de una matriz usando la división de polinomios). Podemos resolver el mismo problema con otro método. El polinomio λ^n se puede dividir con residuo entre el polinomio característico de A. El residuo debe ser un polinomio de grado ≤ 1; denotamos sus coeficientes por p y q:

$$\lambda^n = Q(\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 5) + p + q\lambda.$$

Poniendo $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones para p y q:

$$p + 2q = 2^n, \qquad p + 5q = 5^n.$$

De aquí

$$p = \frac{5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n}{3}, \qquad q = \frac{5^n - 2^n}{3},$$

y

$$A^n = pI_2 + qA = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n & 5^n - 2^n \\ 5\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 5^{n+1} & 5^{n+1} - 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

3. Ejemplo. Encontrar una fórmula general directa para la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante una regla recursiva y dos condiciones iniciales:

$$x_n = -10x_{n-2} + 7x_{n-1}, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 4.$$

Solución. Denotemos por v_n al vector formado por x_n y x_{n+1}:

$$v_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$v_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_{n-1} + 1x_n \\ -10x_{n-1} + 7x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = Av_{n-1},$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

De aquí

$$v_n = A^n v_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n & 5^n - 2^n \\ 5 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 5^{n+1} & 5^{n+1} - 2^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En particular, x_n se puede calcular como la primer componente del vector v_n:

$$x_n = \frac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3}.$$

Comprobación:

$$x_0 = \frac{2+1}{3} = 1, \qquad x_1 = \frac{10+2}{3} = 4, \qquad x_2 = \frac{50+4}{3} = 18. \qquad \square$$

4. Ejercicio. Encontrar una fórmula directa (no recursiva) para números de Fibonacci definidos por una regla recursiva y dos condiciones iniciales:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_0 = 0, \qquad F_1 = 1.$$

Se recomienda usar la siguiente notación:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Utilizando la fórmula obtenida y una calculadora (o computadora), calcular F_{20}.