

# Producto (composición) de permutaciones

**Objetivos.** Aprender a multiplicar permutaciones.

**Requisitos.** Permutaciones, composición de funciones.

**1. Definición (producto de permutaciones).** Sean  $\varphi, \psi \in S_n$ , es decir, sean  $\varphi$  y  $\psi$  dos permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Entonces su *producto*  $\varphi\psi$  se define como su composición  $\varphi \circ \psi$ :

$$\varphi\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (\varphi\psi)(j) = \varphi(\psi(j)) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Notemos que  $\varphi\psi$  es un mapeo biyectivo (como una composición de mapeos biyectivos) y por lo tanto  $\varphi\psi \in S_n$ .

**2. Ejemplos.** Calcular los siguientes productos de permutaciones:

- $\varphi\psi$  y  $\psi\varphi$ , donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $(\varphi\psi)\chi$  y  $\varphi(\psi\chi)$ , donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**3. Ejemplo (producto de una permutación por una transposición).** Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calcule los productos  $\tau_{4,7}\varphi$  y  $\varphi\tau_{4,7}$ .

**4. Ejercicio (producto de una permutación por una transposición).** Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 7 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcule los productos  $\tau_{2,6}\varphi$  y  $\varphi\tau_{2,6}$ .

**5. Producto de una permutación por una transposición, regla general.** Sea  $\varphi \in S_n$  y sean  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p \neq q$ . Explique cómo se obtiene la segunda fila del producto  $\tau_{p,q}\varphi$  a partir de la segunda fila de la permutación  $\varphi$ :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n-1) & \varphi(n) \end{pmatrix}, \quad \tau_{p,q}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ ? & ? & \dots & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Explique cómo se obtiene la segunda fila del producto  $\varphi\tau_{p,q}$  a partir de la segunda fila de la permutación  $\varphi$ :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n-1) & \varphi(n) \end{pmatrix}, \quad \varphi\tau_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ ? & ? & \dots & ? & ? \end{pmatrix}.$$