Permutaciones

Objetivos. Conocer la definición de permutación y ver algunos ejemplos.

Requisitos. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyecticas.

1. Definición (permutación). Una función $\varphi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ se llama *permutación* del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ si es biyectiva. El conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ se denota por S_n.

2. Ejemplo. La aplicación $\varphi\colon \{1,\ldots,6\} \to \{1,\ldots,6\}$, definida por:

$$\varphi(1) = 5, \quad \varphi(2) = 4, \quad \varphi(3) = 3, \quad \varphi(4) = 2, \quad \varphi(5) = 6, \quad \varphi(6) = 1,$$

es una permutación del conjunto $\{1,\ldots,6\}$. Esta permutación se escribe como

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Criterio de que una función $\boldsymbol{\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}}$ es una permutación (sin demostración). Sea $\varphi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) φ es biyectiva (en otras palabras, es una permutación);

(b) φ es inyectiva;

(c) φ es suprayectiva.

Idea de demostración. (b)$\Rightarrow$(c). Se puede demostrar por inducción (sobre k) que si una función $f\colon X \to Y$ es inyectiva, A es un subconjunto de X y A consta de k elementos, entonces la imagen $f(A)$ también consta de k elementos.

(c)$\Rightarrow$(b). Se puede demostrar por inducción (sobre k) que si una función $f\colon X \to Y$ no es inyectiva, A es un subconjunto de X y A consta de k elementos, entonces la imagen $f(A)$ tiene menos de k elementos. $\square$

4. Ejemplo: permutaciones del conjunto $\boldsymbol{\{1,2\}}$. Hay dos permutaciones del conjunto $\{1,2\}$. Estas dos permutaciones forman el conjunto S_2:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Ejemplo: permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Aquí están todos los elementos del conjunto S_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El orden en el cual están escritos aquí los elementos de S_3 se llama el *orden lexicográfico.* Las palabras en un diccionario también se escriben en el orden lexicográfico.

6. Ejercicio. Escriba en el orden lexicográfico todos los elementos del conjunto S_4.

7. Proposición (sin demostración). Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Entonces $|S_n| = n!$.

Demostración informal. Imagine cómo se construye una una permutación $\varphi \in S_n$:

- El valor de $\varphi(1)$ puede ser cualquier elemento de $\{1, \ldots, n\}$.
- Al elegir $\varphi(1)$ ya no podemos usar el mismo valor para $\varphi(2)$ porque estamos construyendo una función inyectiva. Por lo tanto, para cualquier $\varphi(1)$ fijo tenemos $n-1$ opciones para $\varphi(2)$.
- Al elegir $\varphi(1)$ y $\varphi(2)$, tenemos $n-2$ opciones para $\varphi(3)$, etc.

El número total de opciones es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!. \qquad \square$$

8. Ejemplos. Todos los siguientes ejemplos son permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, 5\}$, esto es, elementos de S_5.

- Permutación identidad: $\quad \mathrm{id}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$
- Ciclo de los elementos $2, 4, 5$: $\quad \mathrm{c}_5(3, 5, 2) = \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl] & \\ 5 \arrow[rr] & & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$
- Transposición de 3 y 5: $\quad \tau_{2,4} = \mathrm{c}_5(2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

9. Definición (permutación identidad). La permutación identidad $\mathrm{id}_n \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ se define por la siguiente regla:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \mathrm{id}_n(j) \coloneqq j.$$

Por lo común el subíndice n se omite. Otras notaciones: e_n, e.

10. Definición (ciclo de los elementos $a_1, \ldots, a_r$). Sean $a_1, \ldots, a_r$ algunos elementos diferentes del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Entonces el *ciclo* de los elementos $a_1, \ldots, a_r$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, \ldots, r-1\} \qquad \varphi(a_p) &\coloneqq a_{p+1}; \\ \varphi(a_r) &\coloneqq a_1; \\ \forall j \notin \{a_1, \ldots, a_r\} \qquad \varphi(j) &\coloneqq j. \end{aligned}$$

Vamos a denotar esta permutación por $\mathrm{c}_n(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. También se usa una notación más breve: $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_r)$.

11. Definición (transposición). Un ciclo de dos elementos se llama *transposición*. Notación: si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$, entonces en vez de $\mathrm{c}_n(p, q)$ escribimos simplemente $\tau_{p,q}$. Definición formal:

$$\tau_{p,q}(j) \coloneqq \begin{cases} q, & \text{si } j = p; \\ p, & \text{si } j = q; \\ j, & \text{si } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

12. Definición (transposición simple). Cualquier transposición de la forma $\mathrm{c}_n(p, p+1)$, donde $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, se llama *transposición simple*.