Signo de una permutación.
Permutaciones pares e impares

Objetivos. Definir el signo de una permutación y estudiar propiedades básicos del signo.

Requisitos. Descomposición de una permutación en ciclos disjuntos, decremento de una permutación, transposiciones.

Decremento de una permutación (repaso)

1. Definición del decremento de una permutación (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ una permutación que se descompone en p ciclos de longitudes $r_1, \ldots, r_p$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi) \coloneqq (r_1 - 1) + \cdots + (r_p - 1).$$

2. Teorema sobre la descomposición de una permutación en un producto de transposiciones (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ y sea $d = \mathrm{d}(\varphi)$. Entonces existen d transposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tales que $\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_d$.

3. Teorema sobre el cambio del decremento de una permutación al multiplicarla por una transposición (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q}) = \begin{cases} \mathrm{d}(\varphi) + 1, & \text{si } p \text{ y } q \text{ pertenecen a un ciclo en la descomposición de } \varphi; \\ \mathrm{d}(\varphi) - 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Signo de una permutación

4. Definición (signo de una permutación). El *signo* o *signatura* de una permutación $\varphi \in S_n$ se define como $(-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}$ y se denota por $\operatorname{sgn}(\varphi)$.

5. Ejemplo. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 11 & 6 & 10 & 8 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Representamos φ en forma cíclica (es decir, como un producto de ciclos disjuntos):

$$\varphi = \mathrm{c}_{11}(1,4,5,11)\,\mathrm{c}_{11}(2,3)\,\mathrm{c}_{11}(6)\,\mathrm{c}_{11}(7,10,9)\,\mathrm{c}_{11}(8).$$

Las longitudes de los ciclos son $4,2,1,3,1$. Por eso el decremento de φ es

$$\mathrm{d}(\varphi) = (4-1)+(2-1)+(1-1)+(3-1)+(1-1) = 3+1+0+2+0 = 6.$$

Notamos que en la descomposición de φ en ciclos disjuntos hay 5 factores (incluso los ciclos triviales). Por eso el decremento se puede calcular también de la siguiente manera:

$$\mathrm{d}(\varphi) = 11-5 = 6.$$

Recordamos el sentido del decremento: es el número mínimo de factores necesarios si queremos descomponer la permutación en un producto de transposiciones. En este ejemplo φ se puede escribir como un producto de 6 transposiciones y no se puede escribir como un producto de k transposisiones con $k < 6$. Ahora calculemos el signo de φ:

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^6 = 1.$$

En otras palabras, esta permutación es par.

6. Ejemplo. Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 7 & 4 & 10 & 2 & 9 & 11 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Factorizamos φ en ciclos disjuntos:

$$\varphi = \mathrm{c}_{11}(1)\,\mathrm{c}_{11}(2,7,11,8,5)\,\mathrm{c}_{11}(3,4,10)\,\mathrm{c}_{11}(6,9),$$

calculamos $\mathrm{d}(\varphi)$ y $\operatorname{sgn}(\varphi)$:

$$\mathrm{d}(\varphi) = (1-1)+(5-1)+(3-1)+(2-1) = 11-4 = 7, \qquad \operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^7 = -1.$$

En otras palabras, la permutación φ de este ejemplo es impar.

7. Ejemplo (permutación identidad). Denotemos por id_n o simplemente por e a la permutación identidad del conjunto $\{1, \ldots, n\}$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \mathrm{id}_n(j) := j.$$

Otra forma de escribir la definición de id_n:

$$e = \mathrm{id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

La descomposición de id_n en ciclos disjuntos tiene n factores los cuales son ciclos triviales (ciclos de un elemento):

$$\mathrm{id}_n = \mathrm{c}_n(1)\, \mathrm{c}_n(2)\, \mathrm{c}_n(3) \cdots \mathrm{c}_n(n-1)\, \mathrm{c}_n(n).$$

Por eso

$$\mathrm{d}(\mathrm{id}_n) = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + (1-1) = 0.$$

iempre es 0

y

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_n) = (-1)^0 = 1.$$

Notemos que el decremento y el signo son las características más importantes de una permutación. En el caso de la permutación identidad id_n esta características no dependen de n, y esto nos da un pretexto más para omitir el subíndice n y escribir simplemente id o e.

8. Corolario sobre el cambio del signo de una permutación al multiplicarla por una transposición. Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ con $p \neq q$. Entonces del Teorema 3 (sobre el cambio del decremento de una permutación al multiplicarla por una transposición) se sigue que

$$\mathrm{sgn}(\varphi \tau_{p,q}) = -\,\mathrm{sgn}(\varphi).$$

9. Corolario sobre el signo de una permutación representada como un producto de transposiciones. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ algunas transposiciones de $\{1, \ldots, n\}$ y sea $\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_p$. Entonces de la observación anterior se sigue que

$$\mathrm{sgn}(\varphi) = (-1)^p.$$

10. Observación. El corolario anterior implica, en particular, que si $\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_p$ y $\varphi = \beta_1 \cdots \beta_q$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ y $\beta_1, \ldots, \beta_q$, entonces $(-1)^p = (-1)^q$, es decir, p y q tienen la misma paridad (aunque no necesariamente son iguales). Algunos autores primero demuestran este enunciado y luego definen $\mathrm{sgn}(\varphi)$ como $(-1)^p$, donde p es el número de transposiciones en *alguna* descomposición de φ.

11. Ejemplo (permutación identidad). Por un convenio que resulta ser muy cómodo, el producto de 0 permutaciones es la permutación identidad:

$$\prod_{\varphi\in\emptyset}\varphi = e.$$

Aplicando el corolario anterior con $k = 0$ obtenemos otra vez que $\operatorname{sgn}(e) = (-1)^0 = 1$.

12. Teorema (signo del producto de permutaciones). Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces $\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = \operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\psi)$.

Demostración. Ponemos $c = \operatorname{d}(\varphi)$, $d = \operatorname{d}(\psi)$. Por el teorema sobre la descomposición de una permutación en un producto de transposiciones, existen algunas transposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_c$ y $\beta_1, \ldots, \beta_d$ tales que

$$\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_c, \qquad \psi = \beta_1 \cdots \beta_d.$$

De allí

$$\varphi\psi = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_c \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_d,$$

esto es, $\varphi\psi$ es el producto de $c + d$ transposiciones. Por lo tanto,

$$\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = (-1)^{c+d} = (-1)^c(-1)^d = \operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\psi). \qquad \square$$

13. Corolario (signo de la permutación inversa). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi).$$

Demostración. $\operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(e) = 1$. Recordando que $\operatorname{sgn}(\varphi)$ puede ser 1 o -1 concluimos que $\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi)$. $\square$