

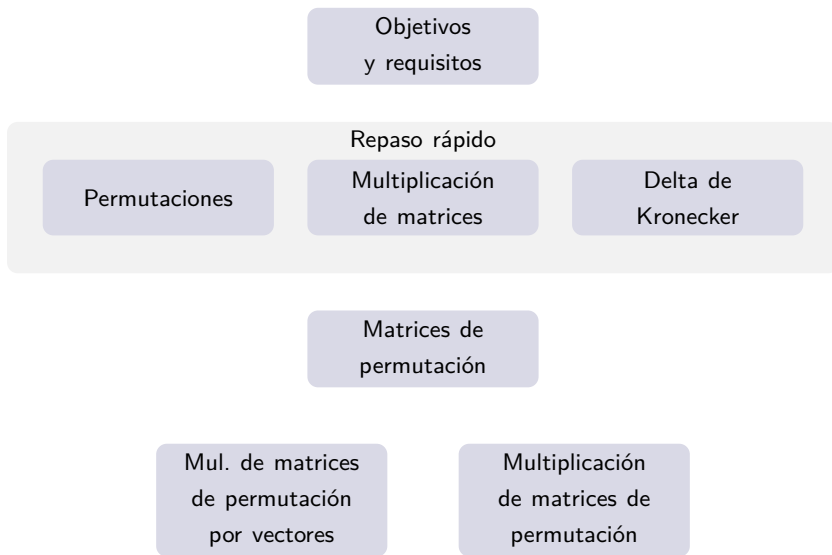
Matrices de permutación

Egor Maximenko
con correcciones de Román Higuera García

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

27 de septiembre de 2026

Contenido



Contenido

Objetivos
y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación
de matrices

Delta de
Kronecker

Matrices de
permutación

Mul. de matrices
de permutación
por vectores

Multiplicación
de matrices de
permutación

Objetivos

1. Escribir en la forma explícita la matriz de permutación asociada a la permutación dada:

$$P_{4,2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Dada una matriz de permutación en la forma explícita, escribir la permutación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,1,2,4}.$$

¿Qué aprenderemos?

3. Multiplicar las matrices de permutación por vectores:

$$P_{\varphi}x.$$

4. Multiplicar las matrices de permutación por vectores básicos:

$$Pe_q.$$

5. Multiplicar las matrices de permutación por matrices generales:

$$P_{\varphi}A, \quad AP_{\varphi}.$$

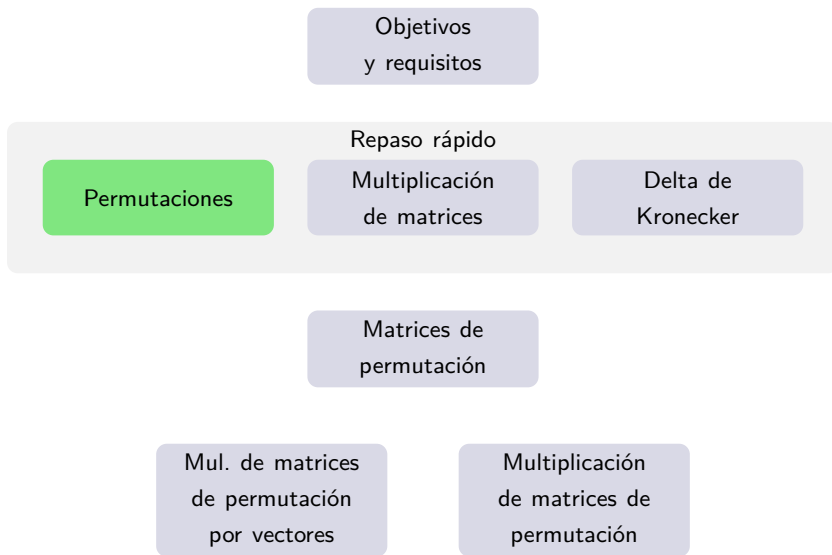
6. Multiplicar las matrices de permutación entre si:

$$P_{\varphi}P_{\psi} = P_{\varphi\psi}.$$

Prerrequisitos

- Permutaciones, multiplicación de permutaciones.
- Notación para vectores y matrices, multiplicación de matrices.
- Delta de Kronecker, sumas con la delta de Kronecker.

Contenido



Ejemplo de una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\varphi: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\varphi(1) := 3, \quad \varphi(2) := 2, \quad \varphi(3) := 4, \quad \varphi(4) := 1.$$

Vamos a usar la siguiente notación más concisa:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 4, 1).$$

En este tema no vamos a usar la notación cíclica.

Definición de permutaciones

Una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$
es una función biyectiva $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Definición de permutaciones

Una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$
es una función biyectiva $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Biyectiva significa inyectiva y suprayectiva.

Definición de permutaciones

Una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ es una función biyectiva $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Biyectiva significa inyectiva y suprayectiva.

Por ejemplo, la función $\varphi: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

es inyectiva porque 3, 2, 4, 1 son diferentes a pares ,

y es suprayectiva porque 3, 2, 4, 1 son todos los elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Por ejemplo, el conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El **producto** $\varphi\psi$ se define como la **composición** $\varphi \circ \psi$.

En otras palabras, la función $\varphi\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ se define mediante la regla:

$$(\varphi\psi)(j) := \varphi(\psi(j)) \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El **producto** $\varphi\psi$ se define como la **composición** $\varphi \circ \psi$.

En otras palabras, la función $\varphi\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ se define mediante la regla:

$$(\varphi\psi)(j) := \varphi(\psi(j)) \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El **producto** $\varphi\psi$ se define como la **composición** $\varphi \circ \psi$.

En otras palabras, la función $\varphi\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ se define mediante la regla:

$$(\varphi\psi)(j) := \varphi(\psi(j)) \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi =$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El **producto** $\varphi\psi$ se define como la **composición** $\varphi \circ \psi$.

En otras palabras, la función $\varphi\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ se define mediante la regla:

$$(\varphi\psi)(j) := \varphi(\psi(j)) \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ .

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La **permutación inversa** φ^{-1} es la función inversa de φ .

Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1}$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La **permutación inversa** φ^{-1} es la función inversa de φ .

Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1} =$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La **permutación inversa** φ^{-1} es la función inversa de φ .

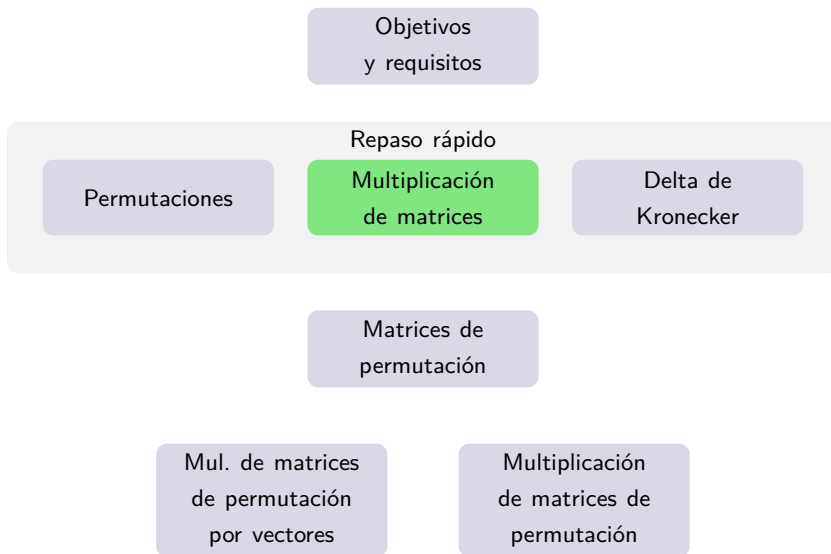
Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Contenido



Importancia de notación

En el siglo XVI fue inventado el simbolismo algebraico:

El cuadrado de la suma de dos términos
es igual al cuadrado del primer término
más el doble producto de ambos términos
más el cuadrado del segundo término.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n
cuya k -ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$
para cada índice k desde 1 hasta n



$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^n$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n
cuya k -ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$
para cada índice k desde 1 hasta n



$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^n$$

Por ejemplo,

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^3 =$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n
cuya k -ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$
para cada índice k desde 1 hasta n



$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^n$$

Por ejemplo,

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$$

Notación para las componentes de vectores en $\mathbb{C}^3$

Dado un vector $v \in \mathbb{C}^3$, denotamos sus componentes por v_1, v_2, v_3 :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Esta notación es muy general.

Si el vector se llama 😊 , entonces sus componentes son $\text{😊}_1, \text{😊}_2, \text{😊}_3$:

$$\text{😊} = \begin{bmatrix} \text{😊}_1 \\ \text{😊}_2 \\ \text{😊}_3 \end{bmatrix}.$$

Notación para vectores en $\mathbb{C}^n$

Dado un vector $v \in \mathbb{C}^n$, denotemos por v_j su j -ésima componente.

Dos vectores u y v se llaman iguales si son de la misma longitud (digamos n) y para cada índice j sus j -ésimas componentes son iguales:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad u_j = v_j.$$

Notación para matrices

Denotemos por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con componentes complejas.

Si A es una matriz, entonces denotemos su entrada (j, k) por $A_{j,k}$.

Por ejemplo, si $\odot \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$, entonces

$$\odot = \begin{bmatrix} \odot_{1,1} & \odot_{1,2} & \odot_{1,3} \\ \odot_{2,1} & \odot_{2,2} & \odot_{2,3} \end{bmatrix}.$$

A veces, es necesario definir una matriz mediante una fórmula para sus componentes:

$$[10j + k^2]_{j,k=1}^{2,3} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 19 \\ 21 & 24 & 29 \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A , denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j .

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A , denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j .

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B , escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{3,*} =$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A , denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j .

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B , escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{3,*} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Repaso: el producto de una matriz por un vector

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$. Entonces Ab se define como

$$Ab = \left[\sum_{k=1}^n A_{j,k} b_k \right]_{j=1}^m.$$

En otras palabras, $Ab \in \mathbb{C}^m$,

y las componentes de Ab se calculan por la siguiente fórmula:

$$(Ab)_j = \sum_{k=1}^n A_{j,k} b_k \quad (j \in \{1, \dots, m\}).$$

Repaso: el producto de dos matrices

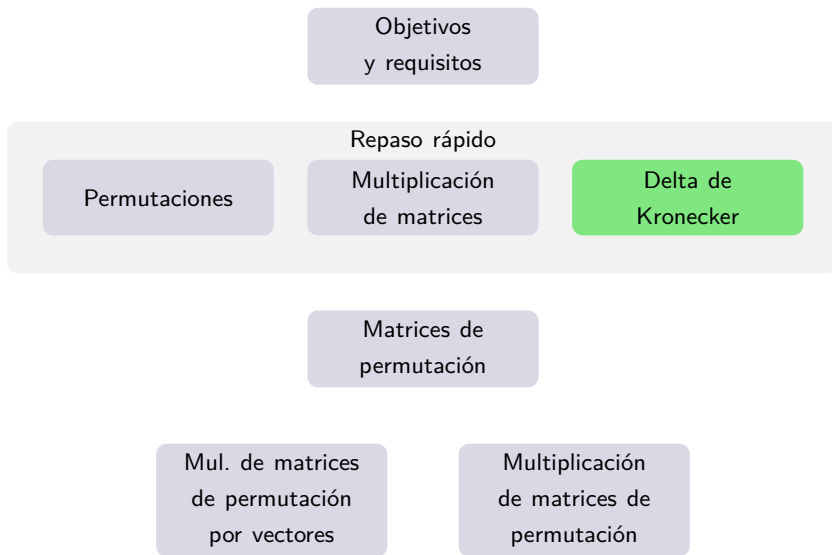
Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{C})$. Entonces, AB se define como

$$AB = \left[\sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right]_{i,j=1}^{m,p}.$$

En otras palabras, $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{C})$,
y las entradas de AB se calculan mediante la siguiente regla:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \quad (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, p\}).$$

Contenido



Delta de Kronecker

La función $\delta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \quad \delta_{7,7} = 1, \quad \delta_{-1,6} = 0, \quad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Delta de Kronecker

La función $\delta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \quad \delta_{7,7} = 1, \quad \delta_{-1,6} = 0, \quad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalúe la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = ? , \quad \delta_{2,3} = ? , \quad \delta_{-6,-6} = ? , \quad \delta_{-5,4} = ? .$$

Delta de Kronecker

La función $\delta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \quad \delta_{7,7} = 1, \quad \delta_{-1,6} = 0, \quad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalúe la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = 1, \quad \delta_{2,3} = 0, \quad \delta_{-6,-6} = 1, \quad \delta_{-5,4} = 0.$$

Fórmula para las sumas con la delta de Kronecker

Proposición

Si $a_1, \dots, a_n$ son algunos números y $p \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^n \delta_{j,p} a_j = a_p.$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^p \delta_{j,p} a_j = \sum_{j \in \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\parallel 1} a_j + \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\parallel 0} a_j = 1 \cdot a_p + 0 = a_p.$$

Contenido

Objetivos
y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación
de matrices

Delta de
Kronecker

Matrices de
permutación

Mul. de matrices
de permutación
por vectores

Multiplicación
de matrices de
permutación

Ejemplo de una matriz de permutación

A cada permutación φ del conjunto $\{1, \dots, n\}$, le vamos a asociar mediante cierta regla una matriz $n \times n$. Por ejemplo,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto P_{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo escribiremos de manera más breve:

$$P_{2,4,3,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices de permutación

$$P_{4,1,3,5,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{3,1,4,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,3,1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hacia la fórmula para la matriz de permutación

Queremos escribir una fórmula general para los elementos de P_φ . Empecemos con un ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En la primera columna de P_φ , solamente un elemento es 1, y los demás son cero.

$$(P_\varphi)_{j,1} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 3, \\ 0, & \text{si } j \neq 3 \end{cases} = \delta_{j,3} = \delta_{j,\varphi(1)}.$$

Verifique que

$$(P_\varphi)_{j,2} = \delta_{j,1} = \delta_{j,\varphi(2)}, \quad (P_\varphi)_{j,3} = \delta_{j,2} = \delta_{j,\varphi(3)}.$$

Escriba una fórmula general para $(P_\varphi)_{j,k}$.

Matrices de permutación

Definición formal

Definición

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi := [\delta_{j,\varphi(k)}]_{j,k=1}^n.$$

En otras palabras, $P_\varphi \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, y

$$(P_\varphi)_{j,k} = \delta_{j,\varphi(k)} \quad (j, k \in \{1, \dots, n\}).$$

Ejercicios

Para cada una de las siguientes matrices de permutación, encuentre la permutación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{?, ?, ?, ?, ?},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{?, ?, ?, ?}.$$

Contenido

Objetivos
y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación
de matrices

Delta de
Kronecker

Matrices de
permutación

Mul. de matrices
de permutación
por vectores

Multiplicación
de matrices de
permutación

El producto de una matriz de permutación por un vector

Ejemplo

Sea $v \in \mathbb{C}^4$ y sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule el producto $P_\varphi v$:

$$P_{3,1,4,2}v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = ?$$

Escriba por separado las componentes del vector $P_\varphi v$:

$$(P_\varphi v)_1 = v_?, \quad (P_\varphi v)_2 = v_?, \quad (P_\varphi v)_3 = v_?, \quad (P_\varphi v)_4 = v_?.$$

Encuentre una fórmula general. Sugerencia: $(P_\varphi v)_j = v_{\varphi(?)}$.

El producto de una matriz de permutación por un vector

Fórmula general

Proposición

Sean $\varphi \in S_n$, $v \in \mathbb{C}^n$. Entonces,

$$P_\varphi v = [v_{\varphi^{-1}(j)}]_{j=1}^n.$$

En otras palabras, $P_\varphi v \in \mathbb{C}^n$ y

$$(P_\varphi v)_j = v_{\varphi^{-1}(j)} \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi v)_j = \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{j,k} v_k = \sum_{k=1}^n \delta_{j,\varphi(k)} v_k \xrightarrow{j=\varphi(k) \iff k=\varphi^{-1}(j)} v_{\varphi^{-1}(j)}.$$

El producto de una matriz de permutación
por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

El producto de una matriz de permutación por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

Demuestre la fórmula general:

$$P_{\varphi}e_q = e_{\varphi(q)}.$$

El producto de una matriz de permutación por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

Demuestre la fórmula general:

$$P_{\varphi}e_q = e_{\varphi(q)}.$$

Recordamos que $e_q = [\delta_{q,k}]_{k=1}^n$.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejemplo

Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea A una matriz general de clase $\mathcal{M}_{5 \times 2}(\mathbb{C})$. Entonces,

$$P_{\varphi}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Encuentre una fórmula para $(P_{\varphi}A)_{j,k}$.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Fórmula general

Proposición

Sea $\varphi \in S_m$ y sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Entonces

$$P_\varphi A = [A_{\varphi^{-1}(p),q}]_{p,q=1}^{m,n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, y

$$(P_\varphi A)_{p,q} = A_{\varphi^{-1}(p),q} \quad (p \in \{1, \dots, m\}, \quad q \in \{1, \dots, n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi A)_{p,q} = \sum_{k=1}^m (P_\varphi)_{p,k} A_{k,q} = \sum_{k=1}^m \delta_{p,\varphi(k)} A_{k,q} \xrightarrow[p=\varphi(k) \iff k=\varphi^{-1}(p)]{} A_{\varphi^{-1}(p),q}.$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{2,4,1,3} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_{4,2,3,1} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{2,4,1,3} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$P_{4,2,3,1} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -4 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_{\varphi} \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_{\varphi} \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejemplo

Multipliquemos $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{C})$ por P_φ , donde $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} B := AP_{3,1,4,2} &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{1,3} & A_{1,1} & A_{1,4} & A_{1,2} \\ A_{2,3} & A_{2,1} & A_{2,4} & A_{2,2} \\ A_{3,3} & A_{3,1} & A_{3,4} & A_{3,2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B se obtiene de A al cambiar el orden de columnas; por ejemplo,

$$B_{*,1} = A_{*,3} = A_{*,\varphi(1)}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Fórmula general

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$AP_{\varphi} = [A_{j,\varphi(k)}]_{j,k=1}^{m,n},$$

esto es, $AP_{\varphi} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y

$$(AP_{\varphi})_{j,k} = A_{j,\varphi(k)} \quad (j \in \{1, \dots, m\}, \quad k \in \{1, \dots, n\}).$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{5,2,4,1,3} =$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 7 \\ -8 & -8 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{5,2,4,1,3} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 7 & -6 \\ 2 & 8 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_{\varphi} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contenido

Objetivos
y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación
de matrices

Delta de
Kronecker

Matrices de
permutación

Mul. de matrices
de permutación
por vectores

Multiplicación
de matrices de
permutación

El producto de dos matrices de permutación

Ejemplo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{\varphi}P_{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adivine la fórmula general para $P_{\varphi}P_{\psi}$.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Obviamente, las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ son del mismo tamaño $n \times n$.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Obviamente, las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ son del mismo tamaño $n \times n$.

Nos falta verificar que para cada par de índices p y q , las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ tienen la misma componente (p, q) :

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\varphi\psi})_{p,q}.$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)}$$

Demostración

$$(P_{\varphi}P_{\psi})_{p,q} = \sum_{k=1}^n (P_{\varphi})_{p,k}(P_{\psi})_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$
$$=$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\ &= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \delta_{p,\varphi(\psi(q))}\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} =\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)}\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)} =\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &= \sum_{k=1}^n (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^n \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)} \\&= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_1 + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_0 \\&= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)} = (P_{\varphi\psi})_{p,q}.\end{aligned}$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.

Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.

Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} = P_{5,1,4,3,2}.$$