Listas de vectores ortogonales y ortonormales

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de listas ortogonales y ortonormales de vectores en un espacio vectorial V con producto interno.

Requisitos. Producto interno, norma inducida por un producto interno.

En esta sección V es un espacio vectorial real o complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En el caso complejo se supone que el producto interno es lineal respecto al segundo argumento.

Ortogonalidad de dos vectores

1. Definición (vectores ortogonales). Sean $x, y \in V$. Se dice que x es *ortogonal* a y y se escribe $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

2. La ortogonalidad de dos vectores es una relación binaria simétrica. Sean $x, y \in V$ tales que $x \perp y$. Muestre que $y \perp x$.

Ortogonalidad de un vector a un conjunto

3. Definición (ortogonalidad de dos conjuntos de vectores). Sean $X, Y \subset V$. Se dice que X es *ortogonal* a Y y se escribe $X \perp Y$, si todo vector de X es ortogonal a todo vector de Y:

$$X \perp Y \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \forall x \in X \qquad \forall y \in Y \qquad x \perp y.$$

4. Definición (ortogonalidad de un vector a un conjunto). Sea $v \in V$ y sea $X \subset V$. Decimos que v *es ortogonal al conjunto* X y escribimos $v \perp X$ si v es ortogonal a cualquier vector del conjunto X:

$$v \perp X \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \forall x \in X \qquad v \perp x.$$

5. Ejercicio: ¿cuál vector es ortogonal a si mismo?. Encuentre todos los vectores $u \in V$ que cumplen con la propiedad $u \perp u$.

6. Proposición (criterio de la ortogonalidad de un vector a todo el espacio). Sea $u \in V$. Entonces

$$u \perp V \qquad \iff \qquad u = \mathbf{0}.$$

7. Proposición (criterio de la ortogonalidad de un vector al subespacio generado por un conjunto de vectores). Sea $X \subset V$ y sea $v \in V$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$v \perp \ell(X) \qquad \iff \qquad v \perp X.$$

Listas ortogonales y ortonormales de vectores

8. Definición (lista ortogonal de vectores). Una lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ en V se llama *ortogonal* si $a_i \perp a_j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$.

9. Producto interno de dos vectores de una lista ortogonal. Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal. Demuestre que para cualesquiera $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \|a_j\|^2.$$

10. Normalización de un vector. Un vector $a \in V$ se llama *unitario* o *normalizado* si $\|a\| = 1$. Si $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces el vector $\dfrac{v}{\|v\|}$ es normalizado.

11. Definición (lista ortonormal de vectores). Una lista de vectores $(a_1, \ldots, a_k)$ en V se llama *ortonormal* si $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{i,j}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

12. Observación. Una lista de vectores es ortonormal si y sólo si esta es ortogonal y todos sus elementos son normalizados (tienen norma 1).

13. Ejemplo. Los siguientes vectores del espacio $\mathbb{R}^4$ son ortogonales:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos los productos internos:

$$\begin{aligned} &\langle a_1, a_1 \rangle = 4, && \langle a_1, a_2 \rangle = 0, && \langle a_1, a_3 \rangle = 0, \\ &\langle a_2, a_1 \rangle = 0, && \langle a_2, a_2 \rangle = 4, && \langle a_2, a_3 \rangle = 0, \\ &\langle a_3, a_1 \rangle = 0, && \langle a_3, a_2 \rangle = 0, && \langle a_3, a_3 \rangle = 10. \end{aligned}$$

Normalizando los vectores a_1, a_2, a_3 obtenemos una lista ortonormal:

$$b_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\top, \quad b_2 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^\top, \quad b_3 = \left[-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right]^\top.$$

14. Ejercicio. Muestre que la siguiente lista de vectores es ortogonal y normalícela:

$$a_1 = \left[1, 2, -3, 1\right]^\top, \quad a_2 = \left[1, 3, 2, -1\right]^\top, \quad a_3 = \left[8, -3, 1, 1\right]^\top.$$

15. Ejercicio. En el espacio vectorial complejo $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

consideremos las funciones

$$e_k(x) = e^{\mathrm{i}\, kx} = \cos(kx) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(kx).$$

Muestre que la familia de funciones $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal, esto es,

$$\forall j, k \in \mathbb{Z} \qquad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Fórmula de Pitágoras–Parseval para sumas de vectores ortogonales

16. Teorema de Pitágoras generalizado. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales en V. Entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2.$$

Demostración. Aplicamos la propiedad aditiva del producto interno y la condición que $a_1, \ldots, a_m$ son ortogonales a pares:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} a_j, \sum_{k=1}^{m} a_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \langle a_j, a_k \rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \delta_{j,k} \|a_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2. \qquad \square$$

17. Tarea adicional. Demuestre el teorema anterior por inducción.

18. Ejercicio (fórmula de Pitágoras–Parseval). Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ algunos escalares. Entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \, \|a_k\|^2.$$

Idea de solución. Probar que los vectores $\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_m a_m$ son ortogonales, aplicar el teorema de Pitágoras generalizado y luego utilizar la fórmula $\|\lambda_k a_k\| = |\lambda_k| \|a_k\|$. $\square$

Combinaciones lineales de vectores ortogonales

La siguiente proposición es muy simple, pero sumamente importante.

19. Proposición (expresión a través del producto interno de los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales). Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales no nulos del espacio V y sea b una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$:

$$b = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j. \tag{1}$$

Entonces para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\lambda_k = \frac{\langle a_k, b\rangle}{\|a_k\|^2}. \tag{2}$$

Demostración. Calcular el producto interno $\langle a_k, b\rangle$ usando la fórmula (1). □

20. Corolario (expresión a través del producto interno de los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortonormales). Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortonormal y sea

$$b = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Entonces para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\lambda_k = \langle a_k, b\rangle.$$

21. Proposición (cualquier lista ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente). Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal en V. Supongamos que $a_i \neq \mathbf{0}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces la lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son algunos escalares tales que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Apliquemos la fórmula (2) de la proposición anterior con $b = \mathbf{0}$:

$$\lambda_k = \frac{\langle \mathbf{0}, a_k\rangle}{\|a_k\|^2} = 0.$$ □

22. Corolario. Cualquier lista ortonormal es linealmente independiente.