Proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por una lista de vectores ortogonales

Objetivos. Estudiar la proyección de un vector sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores.

Requisitos. Producto interno, listas ortogonales de vectores y sus propiedades.

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En el caso complejo suponemos que el producto interno es lineal con respecto al segundo argumento.

1. Expresión de las coordenadas de una combinación lineal de vectores ortogonales a través del producto interno (repaso). Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal de vectores de V y sea b una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$:

$$b = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Entonces los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de esta combinación lineal se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\lambda_j = \frac{\langle a_j, b \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle}.$$

2. Teorema (proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por una lista ortogonal). Sea V un espacio vectorial con producto interno, sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales no nulos y sea $v \in V$. Denotemos por S al subespacio generado por $a_1, \ldots, a_m$:

$$S := \ell(a_1, \ldots, a_m).$$

Entonces existe un único par de vectores (u, w) tal que

$$v = u + w, \qquad u \in S, \qquad w \in S^{\perp}. \tag{1}$$

Los vectores u y w se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle a_k, v \rangle}{\langle a_k, a_k \rangle} a_j, \qquad w = v - u. \tag{2}$$

Demostración. Unicidad. Supongamos que u, w cumplen con (1). Entonces para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos $\langle a_j, w \rangle = 0$ y

$$\langle a_j, v \rangle = \langle a_j, u + w \rangle = \langle a_j, u \rangle + \langle a_j, w \rangle = \langle a_j, u \rangle.$$

La condición $u \in S$ significa que u es una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Los coeficientes λ_j se calculan por la Proposición de los coeficientes de una combinación lineal de vectores no nulos:

$$\lambda_j = \frac{\langle a_j, u \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = \frac{\langle a_j, v \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle}.$$

Luego de la igualdad $v = u + w$ sigue que $w = v - u$. Acabamos de demostrar que u y w cumplen con (2) y por lo tanto se determinan de manera única.

Existencia. Definimos u y w por las fórmulas (2). Entonces para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, u \rangle = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle a_k, v \rangle}{\langle a_k, a_k \rangle} \langle a_k, a_j \rangle = \langle a_j, v \rangle.$$

Por lo tanto para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, w \rangle = \langle a_j, v - u \rangle = \langle a_j, v \rangle - \langle a_j, u \rangle = 0,$$

así que $w \in S^\perp$. □

3. Tarea adicional. Usemos las notaciones de la proposición. Demuestre que u es el vector más cercano al vector v en el conjunto S, esto es, para todo $x \in S \setminus \{v\}$

$$\|x - v\| > \|u - v\|.$$

4. Ejercicio. Escriba las fórmulas (2) en el caso si los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

5. Desigualdad de Bessel. Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortonormal en V y sea $v \in V$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle a_k, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Idea de demostración. Sean u y w como en el teorema de la proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por vectores ortogonales no nulos. En nuestro caso los vectores son ortonormales, así que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \langle a_j, v \rangle \, a_j, \qquad w = v - u.$$

Como los vectores $\langle a_k, v\rangle\, a_k$ son ortogonales, por el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{m} |\langle a_k, v\rangle|^2 \, \|a_k\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|\langle a_k, v\rangle|^2.$$

Luego notemos que los vectores u y w son ortogonales (pues $u \in S \coloneqq \ell(a_1, \ldots, a_m)$ y $w \perp S$), y por el teorema de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2.$$

De aquí

$$\sum_{j=1}^{m} \|\langle a_k, v\rangle|^2 = \|u\|^2 \le \|v\|^2. \qquad \square$$

6. Teorema (criterio de pertenencia de un vector al subespacio generado por vectores ortonormales). Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortonormales en V y sea $v \in V$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$;

(b) $v = \sum_{k=1}^{m} \langle a_k, v\rangle a_k$;

(c) se cumple la *identidad de Parseval* para la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ y el vector v:

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle a_k, v\rangle|^2.$$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sigue de la Proposición de los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales.

(b)$\Rightarrow$(c). Sigue del teorema de Pitágoras, pues los vectores $\langle a_k, v\rangle\, a_k$ son ortogonales entre si, y

$$\big\|\langle a_k, v\rangle\, a_k\big\| = |\langle a_k, v\rangle|.$$

(c)$\Rightarrow$(a). Definamos los vectores u y w como en el teorema de la proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por vectores ortogonales no nulos:

$$u = \sum_{j=1}^{m} \langle a_j, v\rangle\, a_j, \qquad w = v - u.$$

Como ya vimos en la demostración de la desigualdad de Bessel, del teorema de Pitágoras sigue que $\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$ y

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle a_k, v\rangle|^2.$$

La condición (c) implica que $\|w\|^2 = 0$, por lo tanto $w = 0$ y $v = u \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$. $\square$