Operadores lineales nilpotentes

1. Definición (operador lineal nilpotente). Sea V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es *nilpotente* si existe un número entero positivo p tal que $T^p = \mathbf{0}$. El número mínimo p con esta propiedad se llama el *índice de nilpotencia* de T.

2. Definición (matriz nilpotente). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A es *nilpotente* si existe un número entero positivo p tal que $A^p = \mathbf{0}_{n,n}$. El número mínimo p con esta propiedad se llama el *índice de nilpotencia* de A.

Criterio de operador lineal nilpotente

En el siguiente teorema consideramos solamente operadores en espacios vectoriales *complejos* de dimensión finita.

3. Teorema (criterio de operador lineal nilpotente). Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es nilpotente.

(b) $\mu_T(\lambda) = \lambda^p$ con algún $p \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) $\operatorname{sp}(T) = \{0\}$.

(d) $\mathrm{C}_T(\lambda) = \lambda^n$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que T es nilpotente. Entonces existe un número $q \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $T^q = \mathbf{0}$. La última igualdad significa que el polinomio $f(\lambda) = \lambda^q$ es un polinomio anulador de T. Por la definición del polinomio mínimo tenemos que $\mu_T \mid f$. Esto implica que $\mu_T(\lambda)$ debe ser de la forma $\mu_T(\lambda) = \lambda^p$. Por otro lado, sabemos que $\deg(\mu_T) \le \deg(\mathrm{C}_T) = n$, así que $p \le n$.

(b)⇒(c). Supongamos que $\mu_T(\lambda) = \lambda^p$ con algún $p \in \{1, \ldots, n\}$. Como el conjunto de las raíces del polinomio mínimo coincide con el espectro, $\operatorname{sp}(T) = \{0\}$.

(c)⇒(d). Supongamos que $\operatorname{sp}(T) = \{0\}$. El polinomio característico de T se factoriza en factores de grado 1 (aquí utilizamos la hipótesis que el campo es $\mathbb{C}$), y sus raíces son los elementos del espectro, por eso

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = (\lambda - 0)(\lambda - 0)\cdots(\lambda - 0) = \lambda^n.$$

(d)⇒(a). Supongamos que $\mathrm{C}_T(\lambda) = \lambda^n$. Entonces por el teorema de Hamilton–Cayley $T^n = \mathrm{C}_T(T) = \mathbf{0}$. $\square$

4. Observación sobre la condición $\mathrm{sp}(T) = \{0\}$ en campos no algebraicamente cerrados. Si el campo no es algebraicamente cerrado (por ejemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), entonces la condición $\mathrm{sp}(T) = \{0\}$ sigue de otras condiciones, pero no las implica. Pruebe que la siguiente matriz no es nilpotente, aunque su único valor propio real es 0:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Observación sobre la situación en un campo arbitrario. Para cualquier campo $\mathbb{F}$, cualquier espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita y cualquier operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$, las condiciones (a), (b) y (d) siguen siendo equivalentes. Para demostrar que (b) implica (d) se usa un teorema que no demostramos en este curso: *cualquier factor irreducible del polinomio característico es un divisor del polinomio mínimo.*

Descomposición primaria y operador nilpotente

6. Proposición. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$. Supongamos que λ_0 es una raíz de multiplicidad k del polinomio mínimo, esto es,

$$\mu_T(x) = (x - \lambda_0)^k q(x),$$

donde $q(\lambda_0) \neq 0$. Denotemos por W al subespacio $\ker(\lambda_0 I - T)^k$ y por R a la compresión de $\lambda_0 I - T$ a W:

$$R\colon W \to W, \qquad R(w) = (\lambda_0 I - T)(w) \quad \forall w \in W.$$

Entonces R es nilpotente.

Demostración. Sigue del teorema de la descomposición primaria y del criterio de operador nilpotente. □

7. Ejemplo.

$$A = \mathrm{diag}(J_2(7), 9, J_2(7)) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo $\mu_A(x) = (x-7)^2(x-9)$, $W = \ker((7I_5 - A)^2) = \ell(e_1, e_2, e_4, e_5)$, y el operador $R\colon W \to W$ tiene la siguiente matriz asociada respecto a la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_4, e_5)$:

$$R_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(J_2(0), J_2(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algunas propiedades de transformaciones nilpotentes

Estamos suponiendo que V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita n.

8. Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ operadores lineales nilpotentes tales que $ST = TS$. Demuestre que $S + T$ es nilpotente.

9. Ejercicio. Dé un ejemplo de dos matrices nilpotentes $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tales que $A + B$ no sea nilpotente. Sugerencia: puede construir matrices requeridas de ceros y unos.

10. Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente, $T^p = \mathbf{0}$. Demuestre que el operador $I - T$ es invertible y construya su inverso. Sugerencia. Calcule los siguientes productos:

$$(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^{p-1}), \qquad (I + T + T^2 + \cdots + T^{p-1})(I - T).$$

11. Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente, $T^p = \mathbf{0}$. Demuestre que el operador $I + T$ es invertible y construya su inverso.

12. Ejercicio (cada operador nilpotente no nulo es un divisor de cero). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente y diferente del operador cero. Demuestre que T es un *divisor de cero*, esto es, construya un operador lineal $S \neq \mathbf{0}$ tal que $TS = \mathbf{0}$.

13. Ejercicio (cada operador nilpotente diagonalizable es cero). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente diagonalizable. Demuestre que $T = \mathbf{0}$.