# Multiplicación de matrices por vectores

**Objetivos.** Comprender como se multiplican matrices por vectores columnas y también por vectores renglones. Comprender como calcular un renglón o una columna del producto de dos matrices.

**Requisitos.** Multiplicación de matrices.

**1. Los vectores del espacio $\mathbb{F}^n$ se consideran como vectores-columnas.** Es cómodo identificar elementos de $\mathbb{F}^n$ con elementos de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})$ de la siguiente manera: un vector aritmético $x$ con componentes $x_1, \ldots, x_n$ corresponde a la matriz de tamaño $n \times 1$ cuya entrada con índices $(i, 1)$ es igual a $x_i$.

**2. Multiplicación de una matriz por un vector.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{F}^n$. Consideramos $x$ como una matriz $n \times 1$. Entonces el producto $Ax$ está bien definido, es una matriz de tamaño $m \times 1$, y su $(i, 1)$-ésima entrada es

$$(Ax)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} x_{k,1}.$$

Al escribir $x_k$ en vez de $x_{k,1}$ y $(Ax)_i$ en vez de $(Ax)_{i,1}$, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\boxed{(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} x_k.}$$

**3. Ejemplos.** Calcular los productos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -7 \\ 4 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

**4. Producto de un vector-renglón por una matriz.** Sean $x \in \mathbb{F}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces $x$ se identifica con una matriz $m \times 1$, y $x^\top$ es una matriz $1 \times m$ que se llama *vector-renglón* (o *vector-fila*). El producto $x^\top A$ se define según la regla general como una matriz $1 \times n$, cuya $(1, j)$-ésima entrada es

$$(x^\top A)_{1,j} = \sum_{k=1}^{n} (x^\top)_{1,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,1} A_{k,j}.$$

Al escribir $x_k$ en vez de $x_{k,1}$ y $(x^\top A)_j$ en vez de $(x^\top A)_{1,j}$, obtenemos la siguiente fórmula:

$$(x^\top A)_j = \sum_{k=1}^{n} x_k A_{k,j}.$$

**5. Ejemplos.** Calcular los productos

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Renglones y columnas de una matriz

**Notación ($i$-ésimo renglón de $A$).** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$. Denotemos por $A_{i,*}$ al $i$-ésimo renglón de la matriz $A$. Formalmente, $A_{i,*} \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{F})$ y

$$(A_{i,*})_j = A_{i,j}.$$

**Notación ($j$-ésima columna de $A$).** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Denotemos por $A_{*,j}$ a la $j$-ésima columna de la matriz $A$. Formalmente, $A_{*,j} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{F})$ y

$$(A_{*,j})_i = A_{i,j}.$$

## Renglones y columnas del producto de matrices

**6. Fórmula para el $i$-ésimo renglón del producto.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Consideremos el $i$-ésimo renglón del producto $AB$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

En esta fórmula sólo participan los elementos del $i$-ésimo renglón de $A$. Por eso

$$(AB)_{i,*} = A_{i,*}B.$$

**7. Fórmula para la $j$-ésima columna del producto.**

$$(AB)_{*,j} = AB_{*,j}.$$

**8. Ejemplo.** Supongamos que $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{F})$ y

$$A \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Entonces podemos concluir que

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

**9. Ejercicio.** Calcule

$$A \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix},$$

si se sabe que

$$A \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -7 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Multiplicación de una matriz por un vector básico

**10. Ejercicio.** Calcule los siguientes productos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 6 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**11. Notación (vectores básicos en $\mathbb{F}^n$).** Para todo $q \in \{1,\ldots,n\}$ denotemos por $e_q$ al vector en $\mathbb{F}^n$ cuya $p$-ésima componente es 1 y las demás son 0:

$$e_q = \left[\delta_{q,j}\right]_{j=1}^n, \qquad \text{esto es,} \qquad (e_q)_j = \delta_{q,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = q; \\ 0 & \text{si } j \neq q. \end{cases}$$

**12. Ejercicio.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $q \in \{1,\ldots,n\}$. Calcule el producto $Ae_q$. Enuncie la fórmula y escriba una demostración formal usando la delta de Kronecker.