Propiedades de la multiplicación de matrices

Ejercicios

Objetivos. Aprender a demostrar propiedades de la multiplicación de matrices.

Requisitos. Definición de las operaciones con matrices, demostración de las propiedades de las operaciones lineales con matrices, sumas y sus propiedades básicas.

Definición del producto de dos matrices (repaso)

1. Multiplique las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & -5-35+4 & \qquad\qquad \\ \hline & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & -36 & \qquad \\ \hline & & \end{array}\right].$$

Respuesta correcta:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -36 & 41 \\ 11 & -2 & 36 \end{bmatrix}.$$

2. Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Entonces $AB \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$,

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad & A_{1,1}B_{1,3} + A_{1,2}B_{2,3} \\ \hline & & \end{array}\right].$$

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} & B_{4,5} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Escriba la fórmula para la $(2,5)$-ésima entrada del producto AB:

$$(AB)_{2,5} = \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad = \sum \qquad\qquad\qquad .$$

Escriba la fórmula para la entrada de AB con índices $(3,1)$:

$$(AB)_{3,1} =$$

Y otra más:

$$(AB)_{1,4} =$$

4. Definición general del producto de dos matrices.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Entonces

$$AB \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

La entrada (i,j) de la matriz AB, donde

$$i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

se define por medio de la siguiente fórmula:

$$(AB)_{i,j} = \sum$$

Propiedades lineales de sumas (repaso)

Repasemos algunas propiedades de la notación $\sum$.
En los siguientes ejercicios se supone que $\alpha_k, \beta_k, \lambda$ son números reales.

5. Escriba la siguiente expresión en forma extensa:

$$\lambda \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \;=\; \lambda\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \quad =$$

Para continuar la cadena de igualdades aplique la ley distributiva para los números reales y luego escriba el resultado en forma breve:

$$= \qquad\quad + \qquad\quad + \qquad\quad + \qquad\quad = \sum_{k=1}^{4}$$

6. Propiedad homogénea de la suma.
Generalice el resultado del ejercicio anterior:

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k =$$

7. Escriba la siguiente expresión en forma extensa:

$$\sum_{k=1}^{3} (\alpha_k + \beta_k) \;=\; \Big(\qquad\qquad \Big) + \Big(\qquad\qquad \Big) + \Big(\qquad\qquad \Big) \;=$$

Agrupe los sumandos de otra manera y luego escriba el resultado en forma breve:

$$= \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) = \sum \qquad + \sum \qquad .$$

8. Propiedad aditiva de la suma.
Generalice el resultado del ejercicio anterior:

Sumas dobles (repaso)

En los siguientes ejercicios se supone que $\alpha_{i,j}$ son números reales.

9. Escriba la siguiente suma doble en forma extensa:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\alpha_{i,j} \;=\; \sum_{j=1}^{2}\alpha_{1,j} + \sum \qquad\qquad + \sum$$

$$= \Big(\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2}\Big) + \Big(\qquad\qquad\Big) + \Big(\qquad\qquad\Big)$$

Para continuar la cadena de igualdades agrupe los sumandos de otra manera:

$$= \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)$$

Luego escriba el resultado en forma breve:

$$= \sum_{i=1}^{3} \qquad\qquad + \sum$$

$$= \sum \sum_{i=1}^{3}$$

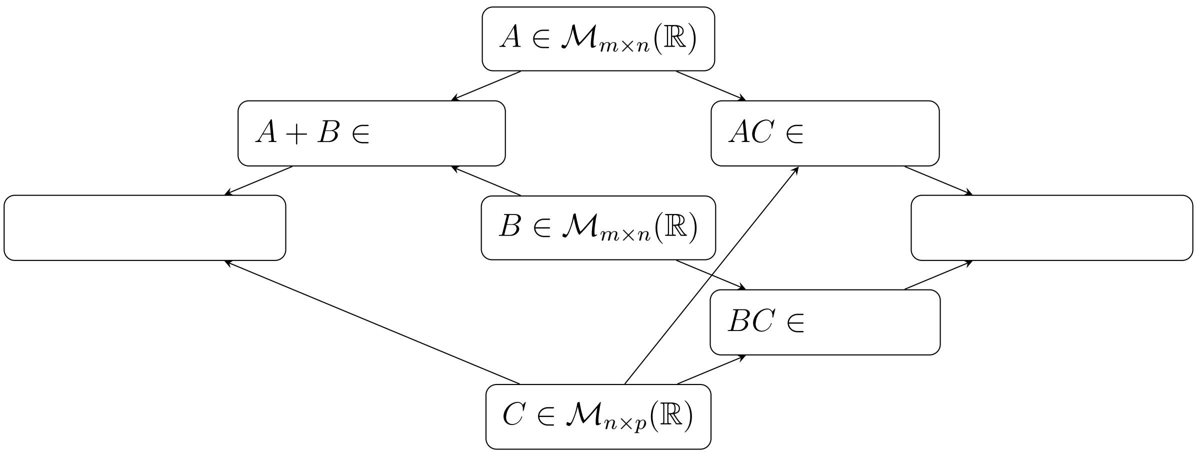
10. Intercambio de las sumas.
Generalice el resultado del ejercicio anterior:

Propiedad distributiva derecha de la multiplicación de matrices

11. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Demostración. Verifiquemos que las matrices $(A+B)C$ y $AC+BC$ son del mismo tamaño:



Supongamos que $\quad i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \quad$ y $\quad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \quad$ son índices arbitarios

y demostremos que la (i,j)-ésima entrada de la matriz $(A+B)C$
es igual a la (i,j)-ésima entrada de la matriz $AC+BC$.

$$\Big((A+B)C\Big)_{i,j} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (\qquad)_{i,k} C_{k,j} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum \Big(\qquad\qquad\Big) C_{k,j}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum \Big(\qquad\qquad\Big) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \sum \qquad\qquad + \sum$$

$$\overset{\text{(v)}}{=\!=} \Big(\qquad\qquad\Big)_{i,j} + \Big(\qquad\qquad\Big)_{i,j} \overset{\text{(vi)}}{=\!=} \Big(\qquad\qquad\qquad\Big)_{i,j}.$$

Justificación de los pasos:

(i) Definición del producto de matrices.

(ii)

(iii)

(iv) Propiedad aditiva de $\sum$.

(v)

(vi) $\square$

Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

12. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(AB)C = A(BC).$$

Demostración. Verifiquemos que las matrices $(AB)C$ y $A(BC)$ son del mismo tamaño:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \arrow[dl] \arrow[ddrr] & & \\
 & \boxed{AB \in \quad\quad} \arrow[dl] & & & \\
\boxed{\quad\quad\quad\quad} & & \boxed{B \in \quad\quad} \arrow[ul] \arrow[dr] & & \boxed{\quad\quad\quad\quad} \\
 & & & \boxed{BC \in \quad\quad} \arrow[ur] & \\
 & & \boxed{C \in \quad\quad} \arrow[uull] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Demostremos que la (i,j)-ésima entrada de $(AB)C$ es igual a la (i,j)-ésima entrada de $A(BC)$, donde $i \in \underbrace{\quad\quad\quad}_{?}$ y $j \in \underbrace{\quad\quad\quad}_{?}$ son dos índices arbitrarios.

$$\begin{aligned}
\Big((AB)C\Big)_{i,j} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=}(\quad\quad\quad)_{i,k}C_{k,j} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=}\left(\sum_{s=}\quad\quad\quad\quad\right)C_{k,j} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum\sum(\quad\quad\quad\quad)C_{k,j} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \sum_{s=}\sum_{k=}(\quad\quad\quad\quad)C_{k,j} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \sum\sum\quad(\quad\quad C_{k,j}) \overset{\text{(vi)}}{=\!=} \sum\quad\left(\sum\quad\quad\quad\right) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=\!=} \sum A_{i,s}(\quad\quad)_{s,j} \overset{\text{(viii)}}{=\!=} \Big(\quad\quad\quad\quad\Big)_{i,j}.
\end{aligned}$$

(i), (ii)	Definición del producto de matrices.
(iii)	
(iv)	Intercambio de las sumas.
(v)	
(vi)	Propiedad homogénea de $\sum$ (basada en la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$).
(vii), (viii)	

$\square$