Criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales

Objetivos. Establecer un criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de operaciones elementales y matrices elementales. Definir la equivalencia de matrices por izquierda y la equivalencia de matrices por derecha.

Requisitos. Matrices elementales y su relación con operaciones elementales, descomposición de una matriz cuadrada en un producto de matrices elementales (ejemplos), definición y propiedades de la matriz inversa.

Matrices equivalentes por izquierda

1. Definición (matrices equivalentes por izquierda). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son *equivalentes por izquierda* o *equivalentes por renglones* y se escribe $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ si existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_1 A = B.$$

2. Observación. Tomando en cuenta la relación entre matrices elementales y operaciones elementales podemos notar que $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ si, y sólo si, es posible transformar A en B aplicando operaciones elementales por renglones.

3. Ejercicio. Demuestre que la relación binaria $\overset{\text{izq}}{\sim}$ es una *relación de equivalencia*, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva. Sugerencia: para la demostración de la propiedad reflexiva puede notar que

$$E_*(1,1)A = A.$$

Matrices equivalentes por derecha

4. Ejercicio. Enuncie la definición de matrices equivalentes por derecha de dos maneras diferentes:

1) en términos de matrices elementales;

2) en términos operaciones elementales por columnas.

5. Ejercicio (relación entre la equivalencia de matrices por izquierda y la equivalencia de matrices por derecha). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que:

$$A \overset{\text{izq}}{\sim} B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^\top \overset{\text{der}}{\sim} B^\top.$$

6. Ejercicio. Demuestre que $\overset{\text{der}}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

Criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales

7. Lema. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ y A es invertible por derecha. Entonces B también es invertible por derecha.

Demostración. Como A es invertible por derecha, existe una matriz C tal que $AC = I_n$. Sean $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tales que $B = E_k \cdots E_1 A$. Multiplicando la igualdad $AC = I_n$ por $E_k \cdots E_1$ por izquierda obtenemos $E_k \cdots E_1 AC = I_n$, esto es,

$$BC = E_k \cdots E_1. \tag{1}$$

Recordamos que todas las matrices elementales son invertibles y el producto de matrices invertibles es invertible. Multiplicamos la igualdad (1) por $(E_k \cdots E_1)^{-1}$ por la derecha:

$$BC(E_k \cdots E_1)^{-1} = I.$$

Aplicamos la ley asociativa de la multiplicación de matrices:

$$B\left(C(E_k \cdots E_1)^{-1}\right) = I.$$

La última igualdad muestra que B es invertible por derecha. $\square$

8. Lema. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible por derecha. Entonces $A \overset{\text{izq}}{\sim} I$, esto es, A se puede transformar en la matriz identidad al aplicar operaciones elementales por renglones.

Demostración. Usando operaciones elementales por renglones transformamos A en una matriz escalonada reducida B. Como la matriz A es invertible por derecha, del Lema 7 sigue que B también es invertible por derecha. Por eso B no puede tener renglones nulos (sabemos que si una matriz tiene una renglón nulo, entonces no es invertible por derecha). Como la matriz B es cuadrada, escalonada reducida y no contiene renglones nulos, $B = I$. Hemos demostrado que $A \overset{\text{izq}}{\sim} I$. $\square$

9. Lema. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible por izquierda. Entonces $A \overset{\text{der}}{\sim} I$, esto es, A se puede transformar en la matriz identidad al aplicar operaciones elementales por columnas.

Demostración. Sea A invertible por izquierda, esto es, existe una matriz C tal que $CA = I_n$. Entonces $A^\top C^\top = I_n^\top = I_n$, lo que significa que $A^\top$ es invertible por derecha. Aplicando el lema anterior (Lema 8) podemos concluir que $A^\top \overset{\text{izq}}{\sim} I_n$ y existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $E_k \cdots E_1 A^\top = I_n$. De aquí $AE_1^\top \cdots E_k^\top = I_n$. Como las matrices transpuestas de las matrices elementales también son matrices elementales, $A \overset{\text{der}}{\sim} I_n$. $\square$

10. Teorema (criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible.

(b) A es invertible por izquierda.

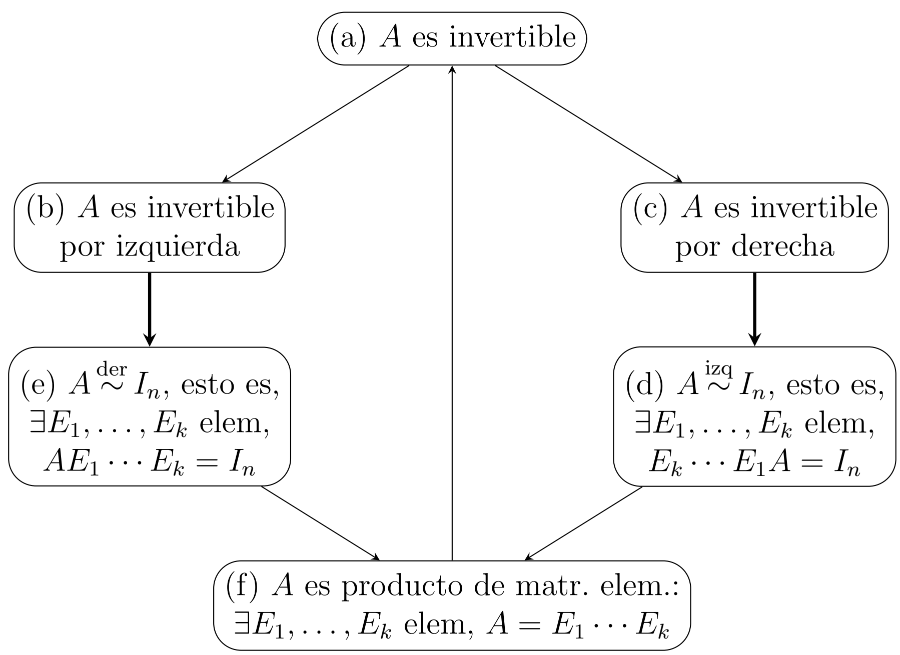
(c) A es invertible por derecha.

(d) $A \overset{\text{izq}}{\sim} I$, esto es, A se puede transformar en la matriz identidad al aplicar operaciones elementales por renglones.

(e) $A \overset{\text{der}}{\sim} I$, esto es, A se puede transformar en la matriz identidad al aplicar operaciones elementales por columnas.

(f) A se puede representar como un producto de matrices elementales, esto es, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $A = E_1 \cdots E_k$.

Demostración. El esquema de demostración:



Las implicaciones (a)⇒(b) y (a)⇒(c) son triviales. En el lema 8 demostramos que (c) implica (d), y en el lema 9 demostramos que (b) implica (e). Dejamos las implicaciones simples (d)⇒(f), (e)⇒(f) y (f)⇒(a) como ejercicios. $\square$

11. Ejercicio. Demuestre las implicaciones (d)⇒(f), (e)⇒(f) y (f)⇒(a).

Equivalencia de matrices en términos de matrices invertibles

12. Proposición (criterio de equivalencia por izquierda). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Entonces $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ si, y sólo si, existe una matriz invertible $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ tal que $CA = B$.

13. Ejercicio. Demuestre la proposición usando el criterio de invertibilidad en términos de matrices elementales.

14. Observación. Algunos autores usan la condición (b) como definición de la equivalencia por izquierda.

15. Ejercicio. Enuncie y demuestre una proposición similar para matrices equivalentes por derecha.