Rango del producto de matrices. Criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de su rango

Objetivos. Demostrar el teorema sobre el rango del producto. Establecer un criterio de inversibilidad de una matriz cuadrada en términos de su rango.

Requisitos. Definición y propiedades del rango de un sistema de vectores. Definición y propiedades del rango de una matriz. Criterio de la inversibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales.

1. Teorema (sobre el rango del producto de dos matrices). Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Entonces

$$\mathrm{r}(AB) \le \min(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)),$$

esto es,

$$\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(B).$$

Demostración. 1. Demostremos que $\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(A)$. Las columnas del producto AB se pueden escribir como combinaciones lineales de las columnas de A:

$$(AB)_{*,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} A_{*,k}.$$

Por eso

$$(AB)_{*,1}, \ldots, (AB)_{*,p} \in \ell(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}),$$

y

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}((AB)_{*,1}, \ldots, (AB)_{*,p}) \le \mathrm{r}(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}) = \mathrm{r}(A).$$

2. Demostremos que $\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(B)$. Usamos la matriz transpuesta y aplicamos la primera parte de la demostración:

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}((AB)^\top) = \mathrm{r}(B^\top A^\top) \le \mathrm{r}(B^\top) = \mathrm{r}(B). \qquad \square$$

2. Corolario (el rango de una matriz se queda igual al multiplicar por una matriz invertible. 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Entonces

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A).$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Entonces

$$\mathrm{r}(BA) = \mathrm{r}(A).$$

3. Ejercicio. Encuentre un ejemplo tal que

$$\mathrm{r}(AB) < \min(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)).$$

4. Teorema (criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de su rango). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces

$$A \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{r}(A) = n.$$

Demostración. 1. Sea A invertible. Entonces $AA^{-1} = I$. De allí $\mathrm{r}(I) \le \mathrm{r}(A)$. Pero $\mathrm{r}(I) = n$ y $\mathrm{r}(A) \le n$. Por lo tanto, $\mathrm{r}(A) = n$.

2. Supongamos que $\mathrm{r}(A) = n$. Usando el método de Gauss–Jordan transformamos A en una matriz escalonada reducida B. Operaciones elementales no cambian el rango de la matriz, por eso $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = n$. Pero B es escalonada reducida. Por lo tanto, $B = I$. Resulta que A es equivalente por filas a la matriz identidad. Como ya sabemos, esto implica que A es invertible. □