

# Descomposición de una matriz cuadrada en un producto de matrices elementales

**Objetivos.** Supongamos que una matriz cuadrada  $A$  se puede transformar en la matriz identidad aplicando operaciones elementales por renglones. Mostrar que en este caso  $A$  es invertible y las matrices  $A$  y  $A^{-1}$  se pueden expresar como productos de matrices elementales.

**Requisitos.** Eliminación de Gauss–Jordan, matrices elementales y sus inversas, correspondencia entre matrices elementales y operaciones elementales.

**1. Ejemplo.** Aplicando operaciones elementales por renglones transformar la matriz dada  $A$  en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escribir las matrices  $A$  y  $A^{-1}$  como productos de matrices elementales. Hacer comprobaciones.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Explicación detallada.* Primera parte. Aplicando operaciones elementales por renglones, transformemos la matriz  $A$  en una matriz escalonada reducida:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 += 3R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 * = \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz  $A$  se pudo transformar en la matriz identidad. Traduciendo el lenguaje de operaciones elementales al lenguaje de matrices elementales obtenemos que

$$E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3)A = I. \quad (1)$$

Segunda parte. La igualdad (1) significa que  $A$  es invertible, y la siguiente matriz  $B$  es una matriz inversa izquierda de  $A$ :

$$B = E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3).$$

Cada uno de los factores aquí es una matriz elemental, y todas las matrices elementales son invertibles. Por eso  $B$  es invertible (por ambos lados). Por consecuencia,  $A$  también es invertible por ambos lados, y  $B = A^{-1}$ .

Tercera parte. Los cálculos y razonamientos anteriores nos permiten escribir la matriz  $A^{-1}$  como un producto de matrices elementales:

$$A^{-1} = E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3).$$

Usando fórmulas para la matriz inversa del producto y las fórmulas de matrices inversas para matrices elementales obtenemos la siguiente descomposición de la matriz  $A$  en un producto de matrices elementales:

$$A = E_+(1, 2, -3)E_+(3, 1, 2)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_*(1, 4). \quad (2)$$

Cuarta parte. Hagamos la comprobación de la fórmula (2). Para no repetir los pasos anteriores, apliquemos la multiplicación a la derecha, es decir, operaciones elementales por columnas. Recordemos que la multiplicación a la derecha por  $E_+(q, p, \lambda)$  equivale a la operación elemental  $C_p + \lambda C_q$ .

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{C_2 += -3C_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 += 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \\ &\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 * = 4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Quinta parte. Calculemos la matriz  $A^{-1}$  usando la fórmula

$$A^{-1} = E_*(1, 1/4)E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_+(3, 1, -2)E_+(1, 2, 3)$$

e interpretando la multiplicación por matrices elementales a la izquierda como operaciones elementales por filas:

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 * = \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sexta parte. Hacemos la comprobación que  $AA^{-1} = I_n$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+1 & 0-3+3 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -2+0+2 & -6+0+6 & 1+0+0 \end{bmatrix} = I_3. \quad \checkmark \quad \square$$

**2. Observación.** Factorizaciones de  $A$  y  $A^{-1}$  en productos de matrices elementales no son únicas.

**3. Observación.** Para calcular la matriz  $A^{-1}$  aplicamos a la matriz  $I$  las mismas operaciones elementales por renglones que habíamos hecho con la matriz  $A$  para transformarla en la matriz identidad. Es cómodo hacer estas operaciones a la vez para calcular  $A^{-1}$ . Vamos a practicar este algoritmo en una de las siguientes clases.

**4. Ejemplo.** Aplicando operaciones elementales por renglones transformar la matriz dada  $A$  en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escriba las matrices  $A$  y  $A^{-1}$  como productos de matrices elementales. Para la comprobación calcular la matriz  $A^{-1}$  a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique  $A$  por  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Solución breve, se recomienda para exámenes y tareas.*

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 += -4R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_2 += -5R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 * = -1/2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= E_{\leftrightarrow}(1, 3)E_*(2, -1/2)E_+(2, 3, -5)E_+(2, 1, -4), \\ A &= E_+(2, 1, 4)E_+(2, 3, 5)E_*(2, -2)E_{\leftrightarrow}(1, 3). \end{aligned}$$

Comprobación que  $AA^{-1} = I_3$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0-4+4 & 0+1+0 & 5-5+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{bmatrix} = I_3. \quad \checkmark \quad \square$$

**5. Ejercicio.** Haga el ejercicio anterior para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .