Operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ y sus propiedades

Ejercicios

Objetivos. Aprender a demostrar propiedades de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$.

Requisitos. Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$.

Igualdad de conjuntos e igualdad de ternas ordenadas

1. Determine si los conjuntos son iguales entre si. Ponga $=$ o $\neq$.

$$\{4,5,6\} \underbrace{\qquad}_{?} \{5,6,4\}, \qquad\qquad \{2,5,5\} \underbrace{\qquad}_{?} \{2,2,5\}.$$

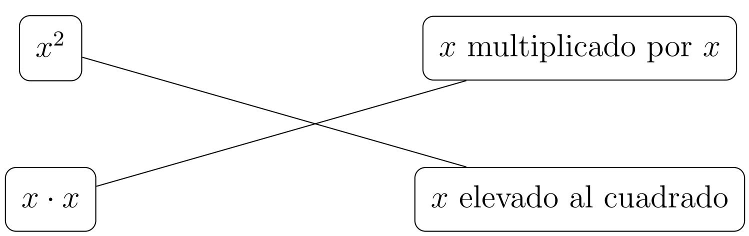
Determine si las siguientes ternas ordenadas son iguales entre si. Ponga $=$ o $\neq$.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Explicar notaciones y justificar igualdades

Es importante comprender bien el significado de cada notación y saber justificar correctamente las igualdades aún cuando son *obvias*.

Ejemplo. Sea $x \in \mathbb{R}$. En el siguiente dibujo están indicadas correspondencias exactas entre notaciones y sus significados:



Ejemplo. Explicar por qué $\quad x^2 = x \cdot x \quad$ (indicar la única respuesta correcta):

○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

○ Por la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$.

✓ Por la definición del cuadrado de un número real.

2. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Establezca correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\alpha(\beta+\gamma)$	producto de α por la suma $\beta+\gamma$
$\alpha\beta+\alpha\gamma$	suma de los productos $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$

3. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Explique por qué $\quad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

○ Por la definición de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

○ Por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$.

○ Por la definición de la adición en $\mathbb{R}^3$.

4. Sean $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indique correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$	producto de la terna $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ por el escalar λ
$\begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}$	terna con componentes $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$

5. Sean $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Explique por qué $\quad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}$.

- ○ Por la definición del producto de un vector del espacio $\mathbb{R}^3$ por un escalar.
- ○ Por la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}^3$.
- ○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}^3$.

6. Sean $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Establezca correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$	terna con componentes $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$
$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$	suma de las ternas $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

7. Sean $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Explique por qué $\quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$.

- ○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de la suma en $\mathbb{R}^3$.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}^3$.

Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^3$

En los siguientes ejercicios se supone que $a, b \in \mathbb{R}^3$,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

8. Escriba la definición de la suma $a + b$:

$$a + b := \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

9. Escriba a qué conjunto pertenece $a + b$:

$$a + b \in \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

10. Escriba las fórmulas para la primera, segunda y tercera componente de la tupla $a + b$:

la primera componente de $a + b$ se denota por	$(a + b)_1$	y es igual a	$\underbrace{\qquad\quad}_{?}$
la segunda componente de $a + b$ se denota por	$\underbrace{\qquad\quad}_{?}$	y es igual a	$\underbrace{\qquad\quad}_{?}$
la tercera componente de $a + b$ se denota por	$\underbrace{\qquad\quad}_{?}$	y es igual a	$\underbrace{\qquad\quad}_{?}$

11. Escriba la fórmula para la k-ésima componente de $a + b$:

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \qquad (a + b)_k = \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

Definición del producto de un escalar por un elemento de $\mathbb{R}^3$

En los siguientes ejercicios se supone que $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

12. Escriba la definición del producto λa:

$$\lambda a := \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

13. Escriba a qué conjunto pertenece λa:

$$\lambda a \in \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

14. Escriba las fórmulas para la primera, segunda y tercera componente de la terna λa:

la primera componente de λa se denota por	$(\lambda a)_1$	y es igual a	$\underbrace{\qquad}_{?}$
la segunda componente de λa se denota por	$\underbrace{\qquad}_{?}$	y es igual a	$\underbrace{\qquad}_{?}$
la tercera componente de λa se denota por	$\underbrace{\qquad}_{?}$	y es igual a	$\underbrace{\qquad}_{?}$

15. Escriba la fórmula para la k-ésima componente de la terna λa:

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \qquad\qquad (\lambda a)_k = \underbrace{\qquad}_{?}$$

Propiedades de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$, ejemplos

Las operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ poséen varias propiedades importantes. Vamos a conocer estas propiedades por medio de ejemplos. Luego vamos a demostrarlas de manera formal.

En los siguientes ejemplos ponemos

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

16. Ejemplo para conocer la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}^3$. Calcule:

$$a + b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad (a+b)+c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$$b + c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad a+(b+c) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

17. Ejemplo para conocer la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^3$.

$$a + b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad b + a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

18. Ejemplo para conocer la propiedad principal del vector cero en $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad a + \mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} \quad + \quad \\ \quad + \quad \\ \quad + \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{\substack{\text{¿con qué vector} \\ \text{coincide?}}}.$$

19. Ejemplo para conocer la propiedad principal del vector opuesto en $\mathbb{R}^3$.

$$-a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad a + (-a) = \begin{bmatrix} \quad + \quad \\ \quad + \quad \\ \quad + \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{\substack{\text{¿con qué vector} \\ \text{coincide?}}}.$$

En los siguientes ejemplos ponemos

$$a = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3, \qquad \mu = -2.$$

20. Ejemplo para conocer la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la adición de vectores.

$$a + b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda(a+b) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$$\lambda a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda a + \lambda b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

21. Ejemplo para conocer la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la adición de escalares.

$$\lambda + \mu = \qquad , \qquad (\lambda + \mu)a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$$\lambda a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \mu a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda a + \mu a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

22. Ejemplo para conocer la propiedad de la multiplicación por el escalar 1.

$$1a = \begin{bmatrix} 1 \cdot \quad \\ 1 \cdot \quad \\ 1 \cdot \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{\substack{\text{¿con qué vector} \\ \text{coincide?}}}.$$

23. Ejemplo para conocer la propiedad de la concordancia de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$ con la multiplicación en $\mathbb{R}$.

$$\mu a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda(\mu a) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \lambda\mu = \qquad , \qquad (\lambda\mu)a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}^3$

24. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$(a+b)+c = a+(b+c). \tag{1}$$

Solución. Usamos la notación estándar para las componentes de a, b, c:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Consideramos la expresión $(a+b)+c$ escrita en el lado izquierdo de la fórmula (1), vamos a transformar esta expresión para obtener la expresión $a+(b+c)$ escrita en el lado derecho de la misma fórmula.

$$(a+b)+c \overset{\text{(i)}}{=\!=} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(v)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \overset{\text{(vi)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \qquad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \qquad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \right)$$

$$\overset{\text{(vii)}}{=\!=} a+(b+c).$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de a, b, c.

(ii) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^3$.

(iv)

(v) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^3$.

(vi)

(vii) $\square$

Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^3$

25. Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$a + b = b + a. \tag{2}$$

Solución. Usamos la notación estándar para las componentes de a, b:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Consideramos la expresión $a + b$ escrita en el lado izquierdo de la fórmula (2), vamos a transformar esta expresión para obtener la expresión $b + a$ escrita en el lado derecho de la misma fórmula.

$$\begin{aligned} a + b \quad & \overset{\text{(i)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \\ & \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \\ & \overset{\text{(v)}}{=\!=} \quad b + a. \end{aligned}$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de a, b.

(ii)

(iii) Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$.

(iv) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^3$.

(v) $\square$

Propiedad principal del vector opuesto en $\mathbb{R}^3$

26. Primero recordemos la propiedad principal del número opuesto (inverso aditivo) de un número real:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha + (-\alpha) = 0.$$

27. Sea $a \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$a + (-a) = \mathbf{0}_3. \tag{3}$$

Solución. Usamos la notación estándar para las componentes de a:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Escribimos el lado izquierdo de la fórmula (3) y lo transformamos en el lado derecho de la misma fórmula.

$$a + (-a) \overset{\text{(i)}}{=} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=} \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=}$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de a, definición de $-a$.

(ii)

(iii) Propiedad principal del número real opuesto: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha + (-\alpha) = \underbrace{\qquad}_{?}$

(iv) Definición de la terna nula. $\square$

Propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la adición en $\mathbb{R}^3$

28. Primero recordemos la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \underbrace{\hspace{6em}}_{?}$$

29. Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b. \tag{4}$$

Solución. Usamos la notación estándar para las componentes de a y b:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Transformamos la expresión $\lambda(a + b)$ en la expresión $\lambda a + \lambda b$:

$$\lambda(a+b) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \lambda\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \lambda \begin{bmatrix} \hspace{6em} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \lambda(a_1 + b_1) \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \hspace{8em} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(v)}}{=\!=} \begin{bmatrix} \hspace{8em} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hspace{8em} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(vi)}}{=\!=} \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(vii)}}{=\!=}$$

(i) Notación para las componentes de a y b.

(ii) Definición de la adición en $\mathbb{R}^3$.

(iii) Definición de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$.

(iv)

(v) Definición de la adición en $\mathbb{R}^3$.

(vi)

(vii) $\square$

Concordancia entre la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$ y la multiplicación en $\mathbb{R}$

30. Primero recordemos la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \alpha(\beta\gamma) =$$

31. Sea $a \in \mathbb{R}^3$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a. \tag{5}$$

Demostración. Usamos la notación estándar para las componentes de a:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Demostramos la igualdad (5).

$$\lambda(\mu a) \overset{\text{(i)}}{=} \lambda\left(\mu \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \lambda \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=} \begin{bmatrix} \lambda(\mu a_1) \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=} \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(v)}}{=} (\lambda\mu) \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \overset{\text{(vi)}}{=}$$

Justificación:

(i)

(ii)

(iii) Definición del producto por escalar en $\mathbb{R}^3$.

(iv) Propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

(v)

(vi)

$\square$