Operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$, donde $\mathbb{F}$ es un campo

Objetivos. Definir el conjunto $\mathbb{F}^n$ y operaciones lineales en $\mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es un campo (cuerpo).

Requisitos. Campos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, un campo finito (por ejemplo, el campo $\mathbb{F}_2$ que consiste en dos elementos), definición general de campo (en otra terminología, cuerpo), conjunto $\mathbb{R}^n$, operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ y la demostración de sus propiedades.

Ejemplos de campos

1. Recordar los axiomas de campo:

- adición y multiplicación como operaciones binarias;
- 4 axiomas de adición;
- la ley distributiva;
- 4 axiomas de multiplicación;
- axioma $0 \neq 1$.

2. Campo $\mathbb{Q}$ de números racionales, campo $\mathbb{R}$ de números reales (repaso breve). Los números racionales son de la forma $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$. El conjunto de números reales se construye como un completamiento (en cierto sentido) del conjunto $\mathbb{Q}$.

3. ¿Para qué trabajar con el campo de números racionales, si tenemos números reales?. Un número real, dado con cualquier exactitud, es una abstracción muy cómoda en matemáticas. Pero en la “vida real” los números reales casi siempre se guardan con una precisión finita, por ejemplo, en el formato “float double” el cual es una representación de números con punto flotante que ocupa 8 bytes = 64 dígitos binarios. Los cálculos con estos números usan el redondeo y son aproximados. Por ejemplo, en esta aritmética con redondeo el valor de la expresión $(1.0/3) * 3$ no coincide con 1.

Los cálculos con los números racionales son exactos. Para algunos áreas se necesitan las respuestas exactas. De hecho, en nuestro curso vamos a trabajar casi siempre con números racionales, para simplificar la vida.

4. Campo $\mathbb{C}$ de números complejos (repaso breve). Los números complejos se pueden escribir en forma $a + b\,\mathrm{i}$, donde i es la unidad imaginaria que tiene la propiedad $\mathrm{i}^2 = -1$.

5. ¿Por qué son tan importantes los números complejos?.

Respuesta algebraica: porque el campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente completo, esto es, todo polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes complejos (o reales) tiene por lo menos una raíz compleja.

Respuesta geométrica: porque la multiplicación de los números complejos corresponde a las rotaciones del plano, y muchos fenómenos matemáticos y físicos se describen naturalmente a través de números complejos.

6. Números de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son racionales. Es fácil ver que la suma y el producto de números de esta forma también se pueden escribir en esta forma.

7. Ejercicio. Demuestre que $\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ cumple con todos los axiomas del campo.

8. Campo de dos elementos. Consideremos el campo $\mathbb{F}_2$, cuyos elementos se denotan por 0 y 1, y las operaciones en $\mathbb{F}_2$ se definen mediante las siguientes reglas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

9. Ejercicio. Demuestre que $\mathbb{F}_2$ cumple axiomas de campo.

10. ¿Para qué sirven campos finitos?. Los campos finitos (por ejemplo, $\mathbb{F}_2$) son muy importantes en la teoría de señales y en la criptografía.

$\mathbb{F}^n$, donde $\mathbb{F}$ es un campo

11. Definición (conjunto $\mathbb{F}^n$). Sea $\mathbb{F}$ un campo. Denotemos por $\mathbb{F}^n$ al conjunto de todas las n-tuplas cuyas componentes pertenecen a $\mathbb{F}$. La igualdad de los elementos de $\mathbb{F}^n$ y las operaciones lineales se definen como en $\mathbb{R}^n$ (por componentes), pero ahora podemos multiplicar los elementos de $\mathbb{F}^n$ solamente por los elementos de $\mathbb{F}$.

12. Ejemplo. El siguiente producto está bien definido en $\mathbb{R}^4$:

$$\sqrt{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pero no está definido en $\mathbb{Q}^4$, tampoco en $\mathbb{F}_2^4$.

13. Ejemplos en $\mathbb{C}^2$. Haga los cálculos en $\mathbb{C}^2$:

$$(1+2\,\mathrm{i})\begin{bmatrix} 3-\mathrm{i} \\ 4+5\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3+2\,\mathrm{i} \\ -4+\mathrm{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-\mathrm{i} \\ 7+5\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

14. Ejemplo en $\mathbb{F}_2^5$. Calcule la suma de dos elementos de $\mathbb{F}_2^5$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. Ejercicio. ¿Cuál elemento es el opuesto al elemento 1 en $\mathbb{F}_2$? ¿Y cuál el elemento opuesto a 0 en $\mathbb{F}_2$? Calcule $-x$, donde $x \in \mathbb{F}_2^4$,

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$