Núcleo e imagen de una transformación lineal

Objetivos. Definir el núcleo y la imagen de una transformación lineal, probar que son subespacios (del dominio y del contradominio respectivamente), ver la relación con las propiedades inyectiva y suprayectiva, conocer algunos ejemplos. Luego en otras clases vamos a estudiar, cómo construir bases en el núcleo y en la imagen, y cómo están relacionadas sus dimensiones.

Requisitos. Transformación lineal, imagen de un conjunto bajo una aplicación, preimagen de un conjunto bajo una aplicación, funciones inyectivas, funciones suprayectivas.

1. Definición (la imagen de una transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La *imagen* de T se define como el conjunto de todos los valores de la aplicación T:

$$\operatorname{im}(T) \coloneqq \big\{ w \in W : \quad \exists v \in V \quad \text{tal que} \quad w = T(v) \big\}.$$

2. Definición (el núcleo de una transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. El *núcleo* (*kernel*, *espacio nulo*) de T se define como la preimagen completa del vector nulo:

$$\ker(T) \coloneqq \big\{ x \in V : T(x) = \mathbf{0}_W \big\}.$$

3. Proposición (el núcleo de una transformación lineal es un subespacio vectorial del dominio). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\ker(T)$ es un subespacio de V.

4. Proposición (la imagen de una transformación lineal es un subespacio vectorial del codominio). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio de W.

Parte de demostración. Se aplica el criterio de subespacio. Se demuestra que el conjunto $\operatorname{im}(T)$ es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por escalares, además contiene al vector cero.

Mostremos que el conjunto $\operatorname{im}(T)$ es cerrado bajo la adición. Sean $w_1, w_2 \in \operatorname{im}(T)$. Por la definición de la imagen, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2)$. Por la linealidad de T,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2.$$

Logramos encontrar un vector $x = v_1 + v_2$ tal que $T(x) = w_1 + w_2$. Por la definición de la imagen, esto implica que $w_1 + w_2 \in \operatorname{im}(T)$. $\square$

Inyectividad y suprayectividad de una transformación lineal en términos de su núcleo e imagen

5. Definición de función suprayectiva (repaso). Una función $f\colon X \to Y$ se llama *suprayectiva* o *sobreyectiva* si para cualquier $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

6. Observación (criterio de la suprayectividad de una función en términos de su imagen). Según la definición, f se llama suprayectiva si $Y \subset \operatorname{im}(f)$. Pero la contención $\operatorname{im}(f) \subset Y$ es válida cualquier función $f\colon X \to Y$. Por lo tanto,

$$f \text{ es suprayectiva} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{im}(f) = Y.$$

7. Definición de función inyectiva (repaso). Una función $f\colon X \to Y$ se llama *inyectiva* si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, se cumple la igualdad $x_1 = x_2$.

8. Proposición (criterio de la inyectividad de una transformación lineal en términos de su núcleo). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

$$T \text{ es inyectiva} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Demostración. $\Longrightarrow$. Supongamos que T es inyectiva. Tenemos por demostrar la igualdad $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Sabemos que la contención $\{\mathbf{0}_V\} \subset \ker(T)$ se cumple para cualquier transformación lineal. Vamos a demostrar que $\ker(T) \subset \{\mathbf{0}_V\}$. Para ello, consideremos un vector arbitrario $v \in \ker(T)$ y demostremos que $v = \mathbf{0}_V$. Por la definición del núcleo tenemos que $T(v) = \mathbf{0}_W$. Por otro lado, sabemos que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. De las últimas dos igualdades sigue que $T(v) = T(\mathbf{0}_V)$. Como T es inyectiva, podemos concluir que $v = \mathbf{0}_V$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sean $u, v \in V$ tales que $T(u) = T(v)$, demostremos que $u = v$. Por la linealidad de T,

$$T(u - v) = T(u + (-1)v) = T(u) + (-1)T(v) = T(u) - T(v) = \mathbf{0}.$$

Esto significa que $T(u - v) \in \ker(T)$. Luego $u - v = \mathbf{0}$ y $u = v$. □

Ejemplo

9. Ejemplo (el núcleo y la imagen de la transformación nula). La transformación nula $\mathbf{0}_{V\to W}\colon V \to W$ está definida mediante la fórmula

$$\forall v \in V \qquad \mathbf{0}_{V\to W}(v) \coloneqq \mathbf{0}_W.$$

Es fácil ver que $\ker(\mathbf{0}_{V\to W}) = V$, $\operatorname{im}(\mathbf{0}_{V\to W}) = \{\mathbf{0}_W\}$.

10. Ejercicio (el núcleo y la imagen de la transformación identidad). Determine $\ker(I)$ y $\operatorname{im}(I)$ de la transformación identidad $I\colon V \to V$ definida mediante la fórmula

$$\forall v \in V \qquad I(v) \coloneqq v.$$

11. Ejemplo (el núcleo y la imagen de la transformación D). Consideremos el operador $D\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $Df = f'$. Entonces $\operatorname{im}(A) = \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$, $\ker(A) = \mathcal{P}_0(\mathbb{F})$.

12. Ejemplo (el núcleo y la imagen de una proyección en $V^2(O)$). Sea P el operador de proyección sobre ℓ_1 paralelamente a ℓ_2. Entonces $\ker(P) = \ell_2$, $\operatorname{im}(P) = \ell_1$.

13. Ejemplo. Transformada lineal en $\mathbb{R}^2$ asociada con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \colon x_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\operatorname{im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon y_2 = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \colon y_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. Problema adicional. Sean V, W, X espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W, X)$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(UT) \subset \operatorname{im}(U), \qquad \ker(T) \subset \ker(UT).$$

15. Problema adicional. En este problema se trata de funciones generales, no necesariamente de transformaciones lineales. Sean $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Demuestre que:

1. Si la composición gf es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

2. Si la composición gf es inyectiva, entonces f es inyectiva.