Inversas de las matrices triangulares superiores

Ejercicios

Objetivos. Demostrar que la inversa a una matriz triangular superior también es triangular superior.

Requisitos. Algoritmo de inversión de una matriz con la eliminación gaussiana, operaciones elementales, matrices triangulares superiores.

Definición de matrices triangulares superiores (repaso)

Notación para el conjunto de las matrices triangulares superiores.
En el conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden n consideramos los siguientes subconjuntos:

$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares superiores;

$\mathrm{UT}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares superiores invertibles.

Notación para la matriz identidad.
Denotamos por I_n a la matriz identidad de orden n:

$$I_n = \left[\delta_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

1. Descripción formal de las entradas por debajo de la diagonal principal. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Si dice que la entrada $A_{i,j}$ está *por debajo de la diagonal principal* si los índices i y j están relacionados de la siguiente manera (ponga $=$, $<$ o $>$):

$$i \quad \underbrace{\qquad}_{?} \quad j.$$

2. Definición de las matrices triangulares superiores.
Escriba la definición formal del conjunto de las matrices triangulares superiores:

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) := \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon\ A_{i,j} = 0 \text{ para todos } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tales que } \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big\}.$$

Operaciones elementales por renglones (repaso)

3. Aplique la operación elemental indicada:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{2,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

4. Aplique la operación elemental indicada:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{2,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= \lambda} \begin{bmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea B la matriz obtenida de A al multiplicar el p-ésimo renglón por λ, es decir

$$A \xrightarrow{R_p *= \lambda} B.$$

Exprese la (p, j)-ésima entrada de la matriz B a través de una entrada de la matriz A:

$$B_{p,j} =$$

6. Aplique la operación elemental indicada:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{2,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += \lambda R_2} \begin{bmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea B la matriz obtenida de A al sumar al q-ésimo renglón el p-ésimo multiplicado por λ:

$$A \xrightarrow{R_q += \lambda R_p} B.$$

Exprese la (q, j)-ésima entrada de la matriz B a través de algunas entradas de la matriz A:

$$B_{q,j} =$$

Operaciones elementales y matrices triangulares superiores

8. Ejemplo. Consideremos una matriz triangular superior de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplique a la matriz A las operaciones elementales indicadas y determine si el resultado es una matriz triangular superior o no:

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= 5R_1} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= 5R_3} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= -6} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

9. Tipos de operaciones elementales que siempre convierten matrices triangulares superiores en matrices triangulares superiores.
Basándose en los resultados del ejercicio anterior adivine cuáles de las siguientes operaciones elementales al aplicarlas a una matriz triangular superior siempre producen una matriz triangular superior:

☐ $R_p \leftrightarrow R_q$ con $p \neq q$;

☐ $R_q + = \lambda R_p$ con $p < q$;

☐ $R_p + = \lambda R_q$ con $p > q$;

☐ $R_p * = \lambda$ con $\lambda \neq 0$.

Operación $R_p *= \lambda$ aplicada a una matriz triangular superior produce una matriz triangular superior

Demostremos de manera formal la regla escrita arriba.

10. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$, sea $p \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, y sea B la matriz obtenida de A al multiplicar el p-ésimo renglón por λ:

$$A \xrightarrow{R_p *= \lambda} B.$$

Demuestre que la matriz B es triangular superior.

Solución. La condición $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ significa que

$$A_{i,j} = 0 \qquad \text{siempre que} \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}$$

Hay que demostrar que $B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$, esto es,

$$B_{i,j} = 0 \qquad \text{siempre que} \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}$$

La operación elemental $R_p *= \lambda R_q$ no afecta a los renglones con índices ...

Por lo tanto es suficiente demostrar que

$$B_{p,j} = 0 \qquad \forall j \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}$$

Por la definición de la operación elemental $R_p *= \lambda$, podemos expresar $B_{p,j}$ de la siguiente manera:

$$B_{p,j} = \underbrace{\hspace{4cm}}_{?}$$

Si $j \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}$, entonces por la condición $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ obtenemos

$$A_{p,j} = \underbrace{\hspace{3cm}}$$

y por lo tanto $B_{p,j} = 0$. $\square$

Operación $R_q + = \lambda R_p$ con $p < q$ aplicada a una matriz triangular superior produce una matriz triangular superior

Demostremos de manera formal la regla escrita arriba.

11. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$, sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $p < q$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea B la matriz obtenida de A al sumar al q-ésimo renglón el p-ésimo multiplicado por λ:

$$A \xrightarrow{R_q \mathrel{+}= \lambda R_p} B.$$

Demuestre que la matriz B es triangular superior.

Cálculo de la inversa a una matriz triangular superior (ejemplo)

12. Calcule la inversa de la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 *= -1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 += -R_3]{R_1 += 3R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 +=}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 *=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \quad & \quad & \quad \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

De aquí

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Resumen: la matriz A^{-1} es ...

y sus entradas diagonales estás relacionadas con las entradas diagonales de la matriz A de la siguiente manera:

$$(A^{-1})_{i,i} =$$

□

Cálculo de la inversa a una matriz triangular superior (otro ejemplo)

13. Calcule la inversa de la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

14. Tipos de operaciones elementales que se usan para invertir una matriz triangular superior.
Determine qué tipos de operaciones elementales se usan para invertir una matriz triangular superior:

- ☐ $R_p \leftrightarrow R_q$ con $p \neq q$;
- ☐ $R_q += \lambda R_p$ con $p < q$;
- ☐ $R_p += \lambda R_q$ con $p > q$;
- ☐ $R_p *= \lambda$ con $\lambda \neq 0$.

Algoritmo del cálculo de la matriz inversa de una matriz triangular superior

15. Escriba el algoritmo.

Entrada: matriz triangular A con entradas diagonales no nulas.

Salida: matriz C inversa a la matriz A.

$n \coloneqq$ el orden de la matriz A;

$C \coloneqq$ la matriz identidad de orden n;

Para $p \coloneqq n, \ldots, 1$:

    Aplicar a la matriz A la operación elemental $R_p \ast= ?$

    Aplicar a la matriz C la misma operación elemental $R_p \ast= ?$

    Para $q \coloneqq 1, \ldots, p-1$:

        Aplicar a la matriz A la operación elemental $R_q += ?$

        Aplicar a la matriz C la misma operación elemental $R_q += ?$

Regresar: la matriz C.

16. Demuestre que durante todo el proceso de la ejecución del algoritmo la matriz C es triangular superior.

17. Explique que pasa con las entradas diagonales de la matriz C cuando se aplican las operaciones elementales de la forma $R_p += \ldots$

18. Explique que pasa con las entradas diagonales de la matriz C cuando se aplican las operaciones elementales de la forma $R_p \ast= \ldots$