Matrices invertibles. La inversa de una matriz

Objetivos. Estudiar la definición y las propiedades básicas de la matriz inversa. Más adelante en este curso vamos a estudiar criterios de invertibilidad y algoritmos para calcular la matriz inversa.

Requisitos. Multiplicación de matrices, propiedades de la multiplicación de matrices.

1. Ejemplo. Calcule AB y BA, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Definición (matriz inversa de una matriz). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que B es *matriz inversa* de la matriz A si

$$AB = I_n \qquad \wedge \qquad BA = I_n. \tag{1}$$

Obviamente las matrices A y B hacen papeles simétricas en esta definición, por eso también se puede decir que A y B son *mutualmente inversas.*

Una matriz cuadrada se llama invertible si posée una matriz inversa. Esta definición es tan importante que la escribiremos otra vez de manera formal:

3. Definición (matriz invertible). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A es *invertible* si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que

$$AB = I_n \qquad \wedge \qquad BA = I_n.$$

4. Proposición (unicidad de la matriz inversa). Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n$. Entonces $B = C$.

Demostración. Usando la ley asociativa de la multiplicación de matrices calculemos el producto BAC de dos maneras diferentes. Por un lado, $BAC = B(AC) = BI_n = B$. Por otro lado, $BAC = (BA)C = I_nC = C$. $\square$

5. Notación (la matriz inversa de una matriz invertible). La proposición anterior muestra que si una matriz es invertible, entonces su inversa es única. En el caso si A es invertible, su inversa se denota por A^{-1}.

6. ¿Por qué no usamos la notación A^{-1} en la definición de matriz invertible?. En cualquier frase de la forma "existe un objeto ... con la propiedad que ..." la lógica matemática exige escribir una variable simple.

bien: existe v tal que $P(v)$;

mal: existe $a+b$ tal que $P(a+b)$.

Es una de las razones por las cuales en la Definición 3 escribimos B en vez de A^{-1}. Otra razón es que no teníamos derecho de escribir A^{-1} antes de demostrar la Proposición 4.

7. ¿Cuándo podemos usar la notación A^{-1}?. El problema es que existen matrices no invertibles, para las cuales la notación A^{-1} no tiene sentido. La la notación $\boldsymbol{A^{-1}}$ se puede usar solamente después de demostrar que A es invertible.

8. Ejemplo trivial de una matriz no invertible. Obviamente, la matriz nula $\mathbf{0}_{n,n}$ no es invertible. De hecho, para cualquier matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se tiene $\mathbf{0}_{n,n}B = \mathbf{0}_{n,n} \neq I_n$.

9. Ejemplo de una matriz no nula pero no invertible. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces para cualquier matriz $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$ tenemos: $AB = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$. Por lo tanto, la matriz A no es invertible.

10. Definición (matriz invertible por la izquierda). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A es *invertible por la izquierda* si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $BA = I_n$.

11. Definición (matriz invertible por la derecha). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que A es *invertible por la derecha* si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n$.

12. Nota. Luego vamos a demostrar que si una matriz es invertible por la izquierda, entonces tambiés es invertible por la derecha y por lo tanto es invertible. Pero antes de demostrar esta afirmación tenemos que distinguir dichos conceptos.

13. Proposición (una matriz que tiene por lo menos un renglón nulo no es invertible por la derecha). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) un renglón de A es nulo: $A_{p,*} = \mathbf{0}_{1,n}$ para algún índice $p \in \{1,\ldots,n\}$, esto es, $A_{p,j} = 0$ para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces A no es invertible por la derecha.

Demostración. Por contraposición, supongamos que existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n$. Entonces, en particular, la entrada (p, p) del producto AB debe coincidir con la entrada (p, p) de la matriz identidad I_n. Pero

$$(AB)_{p,p} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{p,j}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{j,p} = 0,$$

mientras que $(I_n)_{p,p} = 1 \neq 0$. Contradicción. $\square$

14. Proposición (una matriz que tiene por lo menos una columna nula no es invertible por la izquierda). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) una columna de A es nula: $A_{*,j} = \mathbf{0}_m$ para un índice $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces A no es invertible por la izquierda.

15. Ejercicio. Demuestre la proposición anterior.

16. Observación. Las proposiciones anteriores implican que todas las filas y todas las columnas de una matriz invertible son no nulas. Esta condición es necesaria para la invertibilidad de una matriz, pero en general no es suficiente. Existen matrices que no contienen ninguna fila (y ninguna columna) nula, pero no son invertibles.

17. Ejercicio. Usando solamente las definiciones demuestre que la siguiente matriz no es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Indicación: considere una matriz X de orden 2 con entradas incógnitas:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

muestre que la igualdad $AX = I_2$ es equivalente a un sistema de 4 ecuaciones lineales y resuelva ese sistema.

18. Promesa para futuro. Más adelante en este curso vamos a estudiar varios criterios de invertibilidad de una matriz. Para formular y demostrar esos criterios estudiaremos los siguientes conceptos: operaciones elementales, matrices equivalentes por filas, rango de una matriz, determinante de una matriz.

19. Ejercicio: invertibilidad de matrices diagonales. Demuestre que una matriz diagonal

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

es invertible $\iff$ todos sus elementos diagonales son distintos de cero: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$.

20. Ejercicio: invertibilidad de la matriz triangular 2×2. Usando sólo la definición, demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

es invertible $\iff$ $\alpha \neq 0$ y $\gamma \neq 0$. Calcule la matriz inversa (en el caso de la existencia).

21. Teorema (propiedades de la matriz inversa).

1. La matriz identidad I_n es invertible y coincide con su inversa:

$$I_n^{-1} = I_n.$$

2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ son invertibles, entonces la matriz AB también es invertible, y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es invertible, entonces A^{-1} también es invertible, y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es invertible, entonces $A^\top$ también es invertible, y

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Demostración del inciso 2. Denotemos A^{-1} por C y B^{-1} por D. Por la definición de la matriz inversa,

$$AC = I_n, \qquad CA = I_n, \qquad BD = I_n, \qquad DB = I_n.$$

Queremos demostrar que la matriz DC es inversa a la matriz AB. En efecto,

$$(AB)(DC) \overset{(1)}{=\!=} ((AB)D)C \overset{(2)}{=\!=} (A(BD))C \overset{(3)}{=\!=} (AI_n)C \overset{(4)}{=\!=} AC \overset{(5)}{=\!=} I_n$$

y

$$(DC)(AB) \overset{(6)}{=\!=} ((DC)A)B \overset{(7)}{=\!=} (D(CA))B \overset{(8)}{=\!=} (DI_n)B \overset{(9)}{=\!=} DB \overset{(10)}{=\!=} I_n.$$

En los pasos (1), (2), (6), (7) se usa la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices; en los pasos (4) y (9) se aplica la propiedad neutra multiplicativa de I_n, y en los pasos (3), (5), (8), (10) se utilizan las propiedades de las matrices C y D que enunciamos en el inicio de la demostración. $\square$

22. Ejercicio. Demuestrar todos los incisos del teorema.