Guía del Examen parcial II de Álgebra II, licenciatura

Teoremas los más importantes cuyas demostraciones se pueden incluir en el examen

El estudiante tiene que escribir la demostración de manera breve y clara, explicar todos los razonamientos claves. Puede utilizar lemas convenientes, pero en este caso tiene que mencionar los lemas que se usan.

1. Corolarios inmediatos de los axiomas de espacio vectorial.
2. Criterio de subespacio vectorial.
3. Criterio de suma directa (enunciar bien dos condiciones y demostrar que son equivalentes).
4. $\ell(a_1, \ldots, a_n)$ es el subespacio mínimo que contiene $a_1, \ldots, a_n$ (demostrar que es un subespacio, que contiene a los vectores $a_1, \ldots, a_n$, y que es mínimo entre los subespacios con estas propiedades).
5. Criterio de que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente dependientes (uno de los vectores es una combinación lineal de los anteriores, etc.).
6. Criterio de que $a_1, \ldots, a_n, b$ son linealmente dependientes, donde $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente independientes.
7. Teorema principal de las dependencias lineales.
8. Teorema: todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo tamaño.
9. Teorema de la existencia de una sublista básica (en otras palabras, teorema de la la reducción de un conjunto generador a una base).
10. Teorema de la ampliación de una lista de vectores linealmente independientes a una base.
11. Teorema sobre el rango del producto de dos matrices.
12. Fórmula del cambio de las coordenadas de un vector al cambiar la base del espacio.
13. Fórmula de Grassmann que establece una relación entre la dimensión de la suma y la dimensión de la intersección de subespacios.

Definiciones y enunciados
que se pueden incluir en el examen

Hay que escribirlos con todos los detalles.

1. Definición de espacio vectorial: axiomas de adición y axiomas de multiplicación por escalares.
2. Definición de subespacio (no confundir con el criterio de subespacio).
3. Criterio de subespacio.
4. Definición de la suma de subespacios.
5. Definición de la suma directa.
6. Criterio de suma directa.
7. Definición del conjunto generado por un conjunto finito de vectores (= envoltura lineal de un conjunto finito de vectores).
8. Definición de lista de vectores linealmente dependiente (en vez de esto, puede escribir la definición de conjunto linealmente dependiente, pero es un poco más complicado).
9. Definición de lista de vectores linealmente independiente (en vez de esto, puede escribir la definición de conjunto linealmente independiente, pero es un poco más complicado).
10. Criterio de dependencia lineal.
11. Teorema principal sobre la dependencia lineal.
12. Definición de base de un espacio vectorial.
13. Criterio de base de un espacio vectorial (en términos de listas linealmente independientes).
14. Definición de la dimensión de un espacio vectorial.
15. Criterio de base si está dada la dimensión del espacio.
16. Definición del rango de una lista (o conjunto) de vectores.
17. Definición del rango de filas y del rango de columnas de una matriz, relación entre estos dos rangos.
18. Proposición sobre el rango de una matriz escalonada (o pseudoescalonada).
19. Teorema sobre el rango del producto de dos matrices.
20. Definición: la matriz del cambio de base (= la matriz de transición de una base a otra).
21. Fórmula del cambio de las coordenadas de un vector al cambiar la base del espacio.

22. Proposición sobre la unicidad de la matriz que representa el cambio de las coordenadas.
23. Fórmula de Grassmann que establece una relación entre la dimensión de la suma y la dimensión de la intersección de subespacios.
24. Teorema de Kronecker–Capelli.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Examen parcial II. Variante α.

Espacios vectoriales. Bases y dimensión.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 3	tarea 4	asist.+ particip.	parcial 2

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Definición: vectores linealemente independientes.

B. Teorema de Kronecker–Capelli.

C. Definición: la matriz de cambio de base (= matriz de transición).

Problema 2. *9 %.*
Construya una base del subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Escriba cada una de las matrices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 como una combinación lineal de las matrices que forman la base construida. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *9 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 - 2a_2 - 3a_3, \quad b_3 = 3a_2 + 3a_3, \quad b_4 = a_1 + 2a_2 + a_3.$$

Problema 4. *11 %.*
¿Cuándo un espacio vectorial V es la **suma directa** de sus subespacios S_1 y S_2?. Escriba de manera detallada dos condiciones equivalentes y demuestre ambas implicaciones (la necesidad y la suficiencia).

Problema 5. *11 %.*
Enuncie y demuestre la **fórmula de cambio de coordenadas** de un vector al cambiar la base del espacio.

Problema 6. *11 %.*
Demuestre que S no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Indicación: haga un dibujo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon\; 3x_1 \geqslant 5x_2 \right\}.$$

Problema 7. *11 %.*
Se considera el conjunto W_n de las matrices reales simétricas de orden n.

I. Demuestre que W_n es un subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Construya una base de W_3 y calcule $\dim(W_3)$.

III. Escriba una fórmula para $\dim(W_n)$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Examen parcial II. Variante β.

Espacios vectoriales. Bases y dimensión.

Nombre:

<table>
<tr><td rowspan="2">Calificación
(%):</td><td>examen
escrito</td><td>tarea 3</td><td>tarea 4</td><td>asist.+
particip.</td><td>parcial 2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Axiomas de adición en un espacio vectorial.

B. Definición de subespacio (no confundir con el criterio de subespacio).

C. Proposición: unicidad de la matriz que representa el cambio de coordenadas.

Problema 2. *9 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}): \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0 \right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Problema 3. *9 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 + a_3.$$

Problema 4. *11 %.*
Proposición sobre la adición de un vector nuevo a una lista de vectores linealmente independientes. Sea V un espacio vectorial real, sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ vectores linealmente independientes y sea $b \in V$. Demuestre que los vectores $a_1, \ldots, a_n, b$ son linealmente dependientes si, y sólo si, $b \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$.

Problema 5. *11 %.*
Enuncie y demuestre la **fórmula de Grassmann** que establece una relación entre la dimensión de la suma y la dimensión de la intersección de subespacios.

Problema 6. *11 %.*
En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ consideremos los subespacios $S_1 \coloneqq \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y $S_2 \coloneqq \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ de las matrices triangulares superiores y triangulares inferiores respectivamente.

A. Demuestre que $S_1 + S_2 = V$.

B. Calcule $S_1 \cap S_2$ (enuncie la respuesta y demuéstrela).

Problema 7. *11 %.*
I. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Demuestre que $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$.

II. Encuentre dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$\mathrm{r}(AB) < \min\big\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\big\}.$$