Examen Extraordinario de Álgebra III, licenciatura

El Examen a Título de Suficiencia de Álgebra III abarca los siguientes temas:

1. Formas bilineales y cuadráticas.
2. Valores y vectores propios.
3. Forma canónica de Jordan.
4. Espacios con producto interno.
5. Operadores en espacios con producto interno.

Para cada uno de estos temas hay una lista de problemas teóricos. En el examen no pongo problemas teóricos que no estén en las listas.
Los problemas numéricos (Problema 2 y Problema 3) son sólo de los tipos que están en esta guía.

Enunciados y definiciones que se pueden incluir en el examen

1. Definición de la *matriz asociada a una forma bilineal* con respecto a una base.
2. Fórmula del cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio.
3. Definición de *forma cuadrática*.
4. Definición de la *matriz asociada a una forma cuadrática* con respecto a una base.
5. Identidad de paralelogramo para formas cuadráticas.
6. Identidades de polarización para una forma bilineal simétrica.
7. Definición de los *índices de inercia* (llamados también *la signatura*) de una forma cuadrática, a través de las dimensiones de ciertos subespacios.
8. Teorema de los índices de inercia de una forma cuadrática cuya matriz es diagonal con respecto a una base.

9. Definición de *valor propio* de un operador lineal.
10. Definición de *vector propio* de un operador lineal.
11. Definición de *valor propio* de una matriz cuadrada.
12. Definición de *vector propio* de una matriz cuadrada.
13. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ¿Cuándo λ es un valor propio de A?. Escriba al menos 4 condiciones equivalentes.
14. Definición del *polinomio mínimo* de operador lineal.
15. Relaciones entre el polinomio característico y el polinomio mínimo (raíces y divisibilidad).

16. Definición de la *multiplicidad algebraica* y de la *multiplicidad geométrica* de un valor propio.

17. ¿Cuándo un operador lineal es diagonalizable?. Escriba por lo menos 4 condiciones equivalentes.

18. Teorema del mapeo del espectro.

19. Definición de la *exponencial* de una matriz cuadrada.

20. Fórmula para calcular $\exp(tD)$, donde $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal.

21. Teorema de la descomposición primaria de un operador lineal.

22. Definición de *operador lineal nilpotente* y de su *índice de nilpotencia*.

23. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial complejo de dimensión finita. ¿Cuándo T es nilpotente?. Escriba por los menos 3 condiciones equivalentes.

24. Fórmula para calcular $f(J_k(\lambda))$, donde f es un polinomio y $J_k(\lambda)$ es el bloque de Jordan de orden k con entrada diagonal λ.

25. Fórmula para calcular el número de los bloques de Jordan de orden k con entrada diagonal λ en la forma canónica de Jordan de un operador lineal.

26. Fórmula para calcular $\exp(tJ_2(\lambda))$ y $\exp(tJ_3(\lambda))$, donde $t \in \mathbb{R}$.

27. Definición de *producto interno*.

28. Desigualdad de Schwarz.

29. Identidades de polarización para el producto interno en el caso real.

30. Identidad de polarización para el producto interno en el caso complejo.

31. Definición de la *norma inducida por un producto interno*.

32. Teorema generalizado de Pitágoras.

33. Teorema de la proyección ortogonal de un vector al subespacios generado por vectores no nulos.

34. Desigualdad de Bessel.

35. Teorema de la representación de funcionales lineales en un espacio euclidiano o unitario (teorema de Riesz–Fréchet en el caso de dimensión finita).

36. Definición de la *matriz de Gram* de una lista de vectores.

37. Fórmulas del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

38. Teorema de la conservación de los subespacios en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

39. Definición, existencia y unicidad de la transformación adjunta a una transformación lineal en espacios euclidianos o unitarios.

40. Relación entre la imagen de una transformación lineal y el núcleo de su adjunta.
41. Definiciones de operadores *normales*, *autoadjuntos* (*hermitianos*) y *unitarios*.
42. Definiciones de matrices *normales*, *autoadjuntas* (*hermitianas*) y *unitarias*.
43. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ¿Cuándo A es unitaria?. Escriba por lo menos 5 condiciones equivalentes.
44. Teorema de la triangulación de Schur de un operador lineal.
45. Teorema de la triangulación de Schur de una matriz.
46. Teorema de la descomposición de Schur (o diagonalización unitaria) de una matriz normal.
47. Teorema de la descomposición de Schur (o diagonalización unitaria) de una matriz autoadjunta.
48. Definición de *proyección ortogonal*.
49. Criterio de proyección ortogonal.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III, licenciatura. Examen Extraordinario. Variante α.

Formas bilineales y cuadráticas. Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición: la *matriz asociada a una forma cuadrática* con respecto a una base.

B. ¿Cuándo un operador lineal es diagonalizable?. Escriba por lo menos 4 condiciones equivalentes.

C. Identidades de polarización para el producto interno en el caso real.

Problema 2. *15 %.*
Aplique el proceso de **ortogonalización** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *24 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Para cada uno de los valores propios construya una base del subespacio propio.

III. Determine si A es diagonalizable.

IVa. Si A es diagonalizable, entonces construya una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $AP = PD$. Haga la comprobación de la última igualdad.

IVb. Si A no es diagonalizable, entonces construya su forma canónica de Jordan J. También puede construir una matriz invertible P tal que $AP = PJ$ y hacer la comprobación.

V. Escriba el polinomio mínimo de A.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
Sea V un espacio vectorial real y sea $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Demuestre que existe un único par ordenado (g, h) de formas bilineales tales que g sea simétrica, h antisimétrica y se cumpla la igualdad $f = g + h$.

Problema 5. *15 %.*
Demuestre que para toda matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ su matriz transpuesta $A^\top$ tiene el mismo polinomio característico y el mismo espectro que la matriz A:

$$C_A = C_{A^\top}, \qquad \mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A).$$

Problema 6. *15 %.*
Demuestre que para toda matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ su matriz transpuesta $A^\top$ tiene el mismo polinomio característico y el mismo espectro que la matriz A:

$$C_A = C_{A^\top}, \qquad \mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A).$$

Problema 7. *15 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 vectores de un espacio vectorial V con producto interno y sean b_1, b_2, b_3 los vectores que se obtienen de a_1, a_2, a_3 al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Demuestre que el espacio S_1 generado por a_1, a_2, a_3 coincide con el espacio S_2 generado por b_1, b_2, b_3.

Problema 8. *15 %.*
Construya un ejemplo de una matriz $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que no sea diagonal y que cumpla con las igualdades $P^2 = P$ y $P^\top = P$.

Problema 9. *20 %.*
Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n, y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal de rango uno, es decir, $\dim(\mathrm{im}(T)) = 1$. Demuestre que se tiene uno y sólo uno de los siguientes dos casos:

1) T es diagonalizable o 2) T es nilpotente.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III, licenciatura. Examen Extraordinario. Variante β.

Formas bilineales y cuadráticas. Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Teorema de los índices de inercia de una forma cuadrática cuya matriz es diagonal con respecto a una base.

B. Definición: *operador lineal nilpotente* y su *índice de nilpotencia*.

C. Definiciones: operadores *normales*, *autoadjuntos* (*hermitianos*) y *unitarios*.

Problema 2. *15 %.*
Haga el siguiente análisis de la **forma cuadrática** $q(x) := x^\top A\,x$ asociada a la matriz A. Encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $P^\top AP = D$. Haga la comprobación de la última igualdad. Escriba los índices de inercia r_+ y r_- de q. Nota: el par ordenado (r_+, r_-) se llama la signatura de q. Determine qué valores (positivos, negativos, nulos) puede tomar $q(x)$ cuando $x \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *24 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Para cada uno de los valores propios construya una base del subespacio propio.

III. Determine si A es diagonalizable.

IVa. Si A es diagonalizable, entonces construya una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $AP = PD$. Haga la comprobación de la última igualdad.

IVb. Si A no es diagonalizable, entonces construya su forma canónica de Jordan J. También puede construir una matriz invertible P tal que $AP = PJ$ y hacer la comprobación.

V. Escriba el polinomio mínimo de A.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -6 & 8 & 6 \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla no es una forma cuadrática:

$$q(x) := 3x_1x_2 + x_2^3.$$

Problema 5. *15 %.*
Dé un ejemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que el único valor propio real de A sea 0 pero $A^3 \neq 0$.

Problema 6. *15 %.*
Dé un ejemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que el único valor propio real de A sea 0 pero $A^3 \neq 0$.

Problema 7. *15 %.*
Sean S_1, S_2 subespacios de un espacio vectorial V con producto interno. Exprese $(S_1 + S_2)^\perp$ a través de $S_1^\perp$ y $S_2^\perp$. Hay que escribir la fórmula y demostrarla.

Problema 8. *15 %.*
Sea $f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_n\lambda^n$ el polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calcule el polinomio característico de su matriz transpuesta conjugada A^*.

Problema 9. *20 %.*
Demuestre que si la siguiente matriz A es diagonalizable, entonces es nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III, licenciatura. Examen Extraordinario. Variante γ.

Formas bilineales y cuadráticas. Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición: *vector propio* de un operador lineal.

B. Fórmula para calcular el número de los bloques de Jordan de orden k con entrada diagonal λ en la forma canónica de Jordan de un operador lineal.

C. Teorema de la triangulación de Schur de un operador lineal.

Problema 2. *15 %.*
Aplique el proceso de **ortogonalización** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *24 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Para cada uno de los valores propios construya una base del subespacio propio.

III. Determine si A es diagonalizable.

IVa. Si A es diagonalizable, entonces construya una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $AP = PD$. Haga la comprobación de la última igualdad.

IVb. Si A no es diagonalizable, entonces construya su forma canónica de Jordan J. También puede construir una matriz invertible P tal que $AP = PJ$ y hacer la comprobación.

V. Escriba el polinomio mínimo de A.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla de correspondencia

$$q(x) := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, esto es, encuentre una forma bilineal simétrica $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = f(x, x)$.

Problema 5. *15 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable cuyo espectro consiste en un sólo elemento. Demuestre que existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $A = \alpha I_n$.

Problema 6. *15 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable cuyo espectro consiste en un sólo elemento. Demuestre que existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $A = \alpha I_n$.

Problema 7. *15 %.*
Sean V, W espacios vectoriales reales con producto interno y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal que preserva norma:

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W = \|v\|_V.$$

Demuestre que T preserva producto interno:

$$\forall a, b \in V \qquad \langle Ta, Tb \rangle_W = \langle a, b \rangle_V.$$

Problema 8. *15 %.*
Consideremos el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden n con producto interno

$$\langle X, Y \rangle := \operatorname{tr}(X^\top Y).$$

Para cualquier matriz fija $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definamos el operador lineal $M_A\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ por la siguiente regla de correspondencia:

$$M_A(X) := XA.$$

Encuentre el operador adjunto $(M_A)^*$.

Problema 9. *20 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta. Demuestre que la matriz $\exp(i\,A)$ es unitaria.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III, licenciatura. Examen Extraordinario. Variante δ.

Formas bilineales y cuadráticas. Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Criterio del valor propio de un operador lineal (varias descripciones del espectro). Por lo menos 4 condiciones equivalentes.

B. Identidad de polarización para el producto interno en el caso complejo.

C. Definición: *forma cuadrática.*

Problema 2. *15 %.*
Haga el siguiente análisis de la **forma cuadrática** $q(x) := x^\top A\, x$ asociada a la matriz A. Encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $P^\top AP = D$. Haga la comprobación de la última igualdad. Escriba los índices de inercia r_+ y r_- de q. Nota: el par ordenado (r_+, r_-) se llama la signatura de q. Determine qué valores (positivos, negativos, nulos) puede tomar $q(x)$ cuando $x \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 15 \\ 6 & 15 & 48 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *24 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Para cada uno de los valores propios construya una base del subespacio propio.

III. Determine si A es diagonalizable.

IVa. Si A es diagonalizable, entonces construya una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $AP = PD$. Haga la comprobación de la última igualdad.

IVb. Si A no es diagonalizable, entonces construya su forma canónica de Jordan J. También puede construir una matriz invertible P tal que $AP = PJ$ y hacer la comprobación.

V. Escriba el polinomio mínimo de A.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
En el conjunto S de las matrices reales simétricas de orden n se define la *relación de congruencia* mediante la siguiente regla:

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad \det(P) \neq 0 \quad \text{y} \quad B = P^\top A P.$$

Demuestre que la relación de congruencia es reflexiva, simétrica y transitiva.

Problema 5. *15 %.*
Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $P^2 = P$. Demuestre que $\mathrm{Sp}(P) \subseteq \{0, 1\}$.

Problema 6. *15 %.*
Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $P^2 = P$. Demuestre que $\mathrm{Sp}(P) \subseteq \{0, 1\}$.

Problema 7. *15 %.*
Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial de las matrices reales $m \times n$:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^\top B).$$

Sugerencia: para demostrar que $\langle A, A \rangle > 0$ para toda $A \neq 0_{m,n}$, exprese $\langle A, A \rangle$ en términos de las entradas de A.

Problema 8. *15 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta, esto es, $A^* = A$. Demuestre que todos los valores propios de A son reales.

Problema 9. *20 %.*
En el conjunto S de las matrices simétricas reales 3×3 consideremos la relación de congruencia definida mediante la siguiente regla:

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{invertible y tal que} \quad B = P^\top A P.$$

Se sabe que $\cong$ es una relación de equivalencia. Calcule el número de clases de equivalencia. Sugerencia: encuentre un conjunto de matrices $D_1, \ldots, D_m \in S$ con m más grande posible tal que ningunas dos de las matrices $D_1, \ldots, D_m$ sean congruentes entre si y cualquier matriz $A \in S$ sea congruente a una de las matrices $D_1, \ldots, D_m$.