Cálculo de valores y vectores propios (ejemplos)

Objetivos. Aprender a calcular valores y vectores propios de matrices de órdenes pequeños.

Requisitos. Criterio de valor propio, cálculo de determinantes, base del núcleo de una transformación lineal.

1. Ejemplo. Calcular valores propios de la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ dada por su matriz en la base canónica $\mathcal{E}$. Para cada uno de los valores propios construir una base del subespacio propio correspondiente.

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Sabemos que los valores propios de T son raíces del polinomio característico

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \det(\lambda I - T_{\mathcal{E}}) = (-1)^3 \det(T_{\mathcal{E}} - \lambda I).$$

Por eso calculamos primero el polinomio característico. Luego para cada uno de los valores propios λ tendremos que resolver la equación $Tx = \lambda x$, esto es, $(T - \lambda I)x = \mathbf{0}$.

Primera parte. Para calcular el polinomio característico usamos operaciones elementales por filas y columnas y la expansión por cofactores:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_T(\lambda) &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 6 \\ -3 & -7-\lambda & -6 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \mathrel{+}= R_1 \\ R_3 \mathrel{-}= R_1}}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 6 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \mathrel{+}= C_3}{=\!=\!=} (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(8-\lambda-6) = (\lambda+1)^2(\lambda-2).
\end{aligned}$$

De aquí $\mathrm{sp}(T) = \{-1, -1, 2\}$.

Segunda parte. Calculemos vectores propios asociados al valor propio -1, esto es, soluciones de la ecuación $(T + I)x = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -3 & -6 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{+}= R_1 \\ R_3 \mathrel{-}= R_1 \\ R_1 \mathrel{*}= \frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base en el subespacio propio correspondiente al valor propio -1:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación para u_1 y u_2:

$$T_{\mathcal{E}}(u_1)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+6+0 \\ 6-7+0 \\ -6+6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -(u_1)_{\mathcal{E}}; \quad \checkmark$$

$$T_{\mathcal{E}}(u_2)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+0+6 \\ 6+0-6 \\ -6+0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -(u_2)_{\mathcal{E}}. \quad \checkmark$$

Tercera parte. Calculemos vectores propios asociados al valor propio 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -6 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \mathrel{*}= \frac{1}{6} \\ R_2 \mathrel{*}= -\frac{1}{3} \\ R_3 \mathrel{*}= \frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{-}= R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{-}= R_1 \\ R_3 \mathrel{-}= 2R_1}} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base en el subespacio propio correspondiente al valor propio 2:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación para u_3:

$$T_{\mathcal{E}}(u_3)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6+6 \\ -3+7-6 \\ 3-6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(u_3)_{\mathcal{E}}. \quad \checkmark$$

$\square$

2. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

6. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Ejercicio. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demuestre que los valores propios de A son $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ y $\alpha - \mathrm{i}\,\beta$. Calcule los valores propioes de la matriz $B = A^\top A$.

8. Tarea adicional. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una *matriz de probabilidad*. Esto significa por definición que $A_{i,j} \geq 0$ para toda $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y la suma de las entradas en cada columna es 1:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1.$$

Demuestre que 1 es un valor propio de A. Sugerencia: adivine un vector propio de A.