Valores y vectores propios de un operador lineal

Objetivos. Definir los valores propios y los vectores propios de un operador lineal.

Requisitos. Transformaciones lineales, núcleo (kernel, espacio nulo) de una transformación lineal, transformación identidad.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Los casos más importantes son $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Denotamos por I_V o brevemente por I al operador identidad que actúa en V.

1. Definición (valor propio y vector propio de una transformación lineal). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Se dice que λ es un *valor propio* de T si existe un vector $u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

En esta situación el vector u se denomina *vector propio* correspondiente (asociado) al valor propio λ.

El término *valor propio* tiene varios sinónimos: *autovalor*, *eigenvalor*, *valor característico*. De manera similar, en vez de *vector propio* también se dice *autovector* o *eigenvector*.

2. Promesas para futuro. En los siguientes temas vamos a definir el *espectro* de un operador lineal T y demostrar que en el caso de espacios de dimensión finita, el espectro de T coincide con el conjunto de los valores propios de T. Para calcular el espectro de un operador lineal dado por su matriz asociada, vamos a usar el *polinomio característico*.

3. Observación. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces para cualquier vector $u \in V$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

$$Tu = \lambda u \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \in \ker(\lambda I - T).$$

En realidad,

$$Tu = \lambda u \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda I u - Tu = \mathbf{0}_V \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda I - T)u = \mathbf{0}_V \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \ker(\lambda I - T).$$

4. Notación para $\ker(\boldsymbol{\lambda I - T})$. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces denotemos el núcleo del operador $\lambda I - T$ por $\mathrm{S}_{T,\lambda}$:

$$\mathrm{S}_{T,\lambda} := \big\{u \in V : \ (\lambda I - T)u = \mathbf{0}_V\big\}.$$

Por la observación anterior,

$$\mathrm{S}_{T,\lambda} = \big\{u \in V : \ Tu = \lambda u\big\}.$$

Notemos que el conjunto $\mathrm{S}_{T,\lambda}$ está definido para cualquier $\lambda \in \mathbb{F}$ (no importa, si λ es un valor propio de T o no), siempre es un subespacio de V y contiene al vector $\mathbf{0}_V$.

5. Descripción de valores propios en términos de $\ker(\boldsymbol{\lambda I - T})$. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) λ es un valor propio de T;

(b) $\mathrm{S}_{T,\lambda} \neq \{\mathbf{0}_V\}$;

(c) el operador $\lambda I - T$ no es inyectivo.

6. Subespacio propio. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ tales que λ es un valor propio de T. Entonces el subespacio $\mathrm{S}_{T,\lambda} = \ker(\lambda I - T)$ se denomina el *subespacio propio* correspondiente al valor propio λ. Este subespacio consiste de todos los valores propios de T asociados a λ, unidos con el vector cero:

$$\mathrm{S}_{T,\lambda} = \big\{u \in V\colon\ Tu = \lambda u \quad \wedge \quad u \neq \mathbf{0}_V\big\} \cup \{\mathbf{0}_V\}.$$

El conjunto de los vectores propios de T asociados a λ se puede escribir como $\mathrm{S}_{T,\lambda} \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

7. Ejemplo (operador de derivación en el espacio de los polinomios). En el espacio $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ consideremos el *operador derivada* $D\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$,

$$Dp \coloneqq p'.$$

Analicemos cuándo se puede cumplir la igualdad $Dp = \lambda p$ con $p \neq 0$. Si $\deg(p) > 0$, entonces $\deg(p') = \deg(p) - 1$ y la igualdad $Dp = \lambda p$ no se cumple para ningún $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\deg(p) = 0$, entonces $p' = 0$, esto es, $Dp = \lambda p$ con $\lambda = 0$. Por esto el conjunto de los valores propios de D es $\{0\}$.

8. Ejemplo (operador de derivación en el espacio de las funciones infinitamente derivables). En el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ consideremos el operador D definido por $Df = f'$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f(x) = e^{\lambda x}$, entonces $Df = \lambda f$. Resumen: el conjunto de los valores propios de D es $\mathbb{C}$.

9. Ejercicio (vectores propios del operador de derivación en el espacio de las funciones infinitamente derivables). En el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ consideremos el operador D definido por $Df = f'$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Halle el subespacio propio $\mathrm{S}_{D,\lambda}$.

10. Definición (valores y vectores propios de una matriz cuadrada). Los valores propios, vectores propios y subespacios propios de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se definen como las características correspondientes del operador lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ definido mediante la regla

$$T_A(x) \coloneqq Ax.$$

Por ejemplo, un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se denomina *valor propio* de la matriz A si existe un vector $u \in \mathbb{F}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que

$$Au = \lambda u.$$

11. Ejercicio (1 es un valor propio de cada matriz de probabilidad). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una *matriz de probabilidad*, esto es, $A_{i,j} \geq 0$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y la suma de las entradas de cada columna es 1. Demuestre que 1 es un valor propio de A.