Determinante del producto
de dos matrices cuadradas

Objetivos. Demostrar el teorema sobre el determinante del producto de dos matrices cuadradas: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Requisitos. Determinante es una función n-lineal alternante, cualquier función n-lineal alternante se expresa a través del determinante, determinante y operaciones elementales.

Demostración a través de una función n-lineal alternante

1. Determinante considerado como una función de n columnas de la matriz (repaso). Denotamos por $\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n)$ el determinante de la matriz formada de las columnas $c_1, \ldots, c_n$:

$$\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n) \coloneqq \det\big[(c_j)_i\big]_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} | & & | \\ c_1 & \ldots & c_n \\ | & & | \end{vmatrix}.$$

Por el teorema sobre el determinante de la matriz transpuesta, es lo mismo que el determinante de la matriz formada de los renglones $c_1^\top, \ldots, c_n^\top$:

$$\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n) \coloneqq \det\big[(c_i)_j\big]_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} - & c_1^\top & - \\ & \ldots & \\ - & c_n^\top & - \end{vmatrix}.$$

Ya sabemos que la función Det es n-lineal y alternante.

2. Teorema sobre la expresión de una función n-lineal alternante $(\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ a través de la función determinante (repaso). Sea $f\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ una función n-lineal alternante y sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^n$. Entonces

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Det}(v_1, \ldots, v_n) f(e_1, \ldots, e_n).$$

3. Columnas del producto de dos matrices (repaso). Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$, $j \in \{1, \ldots, p\}$. Entonces la j-ésima columna del producto AB es igual al producto de la matriz A por la j-ésima columna de la matriz B:

$$(AB)_{*,j} = AB_{*,j}.$$

4. Demostración del teorema sobre el determinante del producto, a través de una función n-lineal alternante. Consideremos la función $f\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ definida mediante la siguiente regla:

$$f(b_1, \ldots, b_n) \coloneqq \det \left(A \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \ldots & b_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right).$$

Usando el hecho que la j-ésima columna del último producto de matrices es igual al producto Ab_j, por eso

$$f(b_1, \ldots, b_n) = \det \begin{bmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \ldots & Ab_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, Ab_n).$$

De las propiedades de operaciones con matrices y de la propiedad n-lineal de la función Det sigue que f es n-lineal. En realidad, si $k \in \{1, \ldots, n\}$ y en lugar del k-ésimo argumento de f ponemos $u + \lambda v$, entonces

$$\begin{aligned} f(b_1, \ldots, \underbrace{u + \lambda v}_{k\text{-ésimo argumento}}, \ldots, b_n) &= \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, A(u + \lambda v), \ldots, Ab_n) \\ &= \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, Au + \lambda Av, \ldots, Ab_n) \\ &= \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, Au, \ldots, Ab_n) \\ &\qquad + \lambda \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, Av, \ldots, Ab_n) \\ &= f(b_1, \ldots, u, \ldots, b_n) + \lambda f(b_1, \ldots, v, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Además de esto, la función f es alternante: si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p < q$ y $b_p = b_q$, entonces $Ab_p = Ab_q$ y de la propiedad alternante de Det sigue que f se anula:

$$f(b_1, \ldots, b_p, \ldots, b_q, \ldots, b_n) = \operatorname{Det}(Ab_1, \ldots, Ab_p, \ldots, Ab_q, \ldots, Ab_n) = 0.$$

Por el teorema sobre la representación de una función n-lineal alternante a través del determinante (teorema 2 de este archivo),

$$f(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{Det}(b_1, \ldots, b_n) f(e_1, \ldots, e_n) = \operatorname{Det}(b_1, \ldots, b_n) \det(A).$$

Sustituyendo los vectores $b_1, \ldots, b_n$ por las columnas de la matriz B obtenemos que

$$\det(AB) = f(B_{*,1}, \ldots, B_{*,n}) = \det(B) \det(A).$$

Demostración a través de matrices elementales

5. Lema. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz no invertible. Entonces $\det(A) = 0$.

Demostración. Como A no es invertible, los renglones de A son linealmente dependientes. Por el criterio de vectores linealmente dependientes, existe un $p \in \{1, \ldots, n\}$ tal que el p-ésimo renglón de A es una combinación lineal de los anteriores:

$$A_{p,*} = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k A_{k,*}.$$

Aplicando el hecho que la función Det es polilineal y alternante obtenemos que

$$\begin{aligned}\det(A) &= \operatorname{Det}(A_{1,*}, \ldots, A_{p-1,*}, \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k A_{k,*}, A_{p+1,*}, \ldots) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \operatorname{Det}(A_{1,*}, \ldots, A_{p-1,*}, A_{k,*}, A_{p+1,*}, \ldots) = 0.\end{aligned}$$

En la última suma todos los sumandos son cero porque el renglón $A_{k,*}$ $(1 \le k \le p-1)$ coincide con uno de los renglones $A_{1,*}, \ldots, A_{p-1,*}$ y el determinante correspondiente se anula. $\square$

6. Lema. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada arbitraria y sea $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz elemental. Entonces $\det(EB) = \det(E)\det(B)$.

Demostración. Para comprender esta demostración se recomienda repasar cómo afectan las operaciones elementales al determinante.

Consideremos todos los tres tipos de matrices elementales:

1. Sea $E = E_{\leftrightarrow}(p, q)$. Entonces E se obtiene de la matriz I_n al aplicar la operación elemental $R_p \leftrightarrow R_q$, por lo tanto $\det(E) = -\det(I_n) = -1$. Además la matriz EB se obtiene de B al aplicar la operación elemental $R_p \leftrightarrow R_q$, por lo tanto $\det(EB) = -\det(B)$. Podemos concluir que

$$\det(EB) = -\det(B) = \det(E)\det(B).$$

2. Sea $E = E_*(p, \lambda)$. En este caso

$$I_n \xrightarrow{R_p \mathrel{*}= \lambda} E, \qquad \det(E) = \lambda \det(I_n) = \lambda.$$

Por otro lado,

$$B \xrightarrow{R_p \mathrel{*}= \lambda} EB, \qquad \det(EB) = \lambda \det(B).$$

Conclusión: $\det(EB) = \det(E)\det(B)$.

3. Sea $E = E_+(p, q, \lambda)$. Entonces $\det(E) = 1$, $B \xrightarrow{R_p \mathrel{+}= \lambda R_q} EB$,

$$\det(EB) = \det(B) = \det(E)\det(B). \qquad \square$$

7. Demostración del teorema sobre el determinante del producto de dos matrices cuadradas, a través de matrices elementales. Primer caso: A no es invertible. En este caso los renglones de A son linealmente dependientes. Entonces los renglones del producto AB también son linealmente dependientes. Por el Lema 5 tenemos que $\det(A) = 0$ y $\det(AB) = 0$, así que la fórmula se cumple.

Segundo caso: A invertible. En este caso la matriz A se puede escribir como un producto de matrices elementales: $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k$. Aplicando el Lema 6 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k B)\\ &= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(B)\\ &= \det(E_1 \cdots E_k) \det(B)\\ &= \det(A) \det(B).\end{aligned}$$

Corolarios

8. Corolario (determinante de la matriz inversa). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Entonces $\det(A) \neq 0$ y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

9. Corolario (determinante de la matriz asociada a un operador lineal no depende de la base). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de V. Entonces

$$\det(T_{\mathcal{A}}) = \det(T_{\mathcal{B}}).$$

Demostración. Sigue del teorema y de la fórmula $T_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. □

10. Definición (determinante de una transformación lineal). Sea V un espacios vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. El *determinante* de T se define mediante la regla

$$\det(T) \coloneqq \det(T_{\mathcal{B}}),$$

donde $\mathcal{B}$ es alguna base de V. El corolario anterior muestra que esta definición es correcta, es decir, no depende de $\mathcal{B}$.

11. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz *nilpotente*, esto es, $A^p = 0$ para alguna potencia entera positiva p. Calcule $\det(A)$.

12. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz *idempotente*: $A^2 = A$. ¿Qué valores puede tomar $\det(A)$? Para cada uno de los valores posibles dé un ejemplo.

13. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con propiedad $A^2 = I_n$. ¿Qué valores puede tomar $\det(A)$? Para cada uno de los valores posibles dé un ejemplo.