Cálculo de algunos determinantes de n-ésimo orden

Objetivos. Aprender calcular determinantes usando operaciones elementales y el desarrollo por cofactores.

Requisitos. Determinante y operaciones elementales, desarrollo del determinante por cofactores.

1. Ejemplo (repaso). $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 15 \\ -1 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 14 \end{vmatrix}$.

Cálculo de determinantes de n-ésimo orden

En cada uno de los siguientes ejemplos hay que calcular el determinante D_n para $n = 4$ reduciéndolo con operaciones elementales a un determinante de matriz triangular, y luego generalizar el resultado al caso de n arbitrario.

2. Ejemplos y ejercicios.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix},$$

$$D_n = \det\left(\text{mín}(i,j)\right)_{i,j=1}^{n}, \qquad D_n = \det\left(\text{máx}(i,j)\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$D_n = \det\left(i+j-1\right)_{i,j=1}^{n}, \qquad D_n = \det\left(|i-j|\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a_1+x & x & x & x \\ x & a_2+x & x & x \\ x & x & a_3+x & x \\ x & x & x & a_4+x \end{vmatrix}.$$

3. Ejercicio. Calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$, donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ejercicio. ¿Cómo se cambiará el determinante de orden n al escribir sus renglones en orden contrario?

5. Ejercicio. Usando el resultado del ejercicio anterior y el hecho que el determinante es una función antisimétrica de los renglones, calcule el determinante de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $A_{i,j} = 0$ para todos i, j, $i + j > n + 1$.