

Cálculo de determinantes numéricos

Objetivos. Aprender calcular determinantes usando operaciones elementales y el desarrollo por cofactores.

Requisitos. Determinante y operaciones elementales, desarrollo del determinante por cofactores.

1. Ejemplo. Calcular el determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Solución. Elijamos un pivote y eliminemos las entradas de su renglón o columna. En este ejemplo es cómodo usar como pivote la entrada (1, 2) y eliminar las demás entradas de la segunda columna. En realidad, sólo tenemos que eliminar la entrada (3, 2):

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ahora podemos desarrollar el determinante por cofactores en la segunda columna.

$$D = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Aplicamos operaciones elementales para obtener un renglón “casi nulo” o una columna “casi nula” (con todas entradas nulas excepto una). Por ejemplo, eliminemos elementos de la tercera columna usando como pivote la entrada (1, 3):

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += -3R_1 \\ R_3 += 3R_1}} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -16 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la tercera columna:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -16 - 12 = -28.$$

□

2. Ejercicio. Calcule el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Respuesta: 94.