Descomposición de permutaciones en productos de transposiciones

Objetivos. Demostrar que toda permutación se puede escribir como un producto de transposiciones. Demostrar que el número mínimo de factores en este producto coincide con el decremento de la permutación.

Requisitos. Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos, producto de un ciclo por una transposición.

Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos (repaso)

1. Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos (repaso). Toda permutación se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos.

2. Producto de dos ciclos que tienen un elemento en común (repaso). Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $1 < p < q \leq n$ y sean $a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q$ algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(a_p, \ldots, a_q) = \mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q).$$

3. Producto de un ciclo por una transposición que tiene un elemento común con el ciclo (repaso). Sea $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ y sean $a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}$ algunos elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(a_p, a_{p+1}) = \mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}).$$

4. Producto de un ciclo por una transposición de dos elementos de ciclo (repaso). Sean $a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q$ elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q)\, \mathrm{c}_n(a_q, a_p) = \mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_p)\, \mathrm{c}_n(a_{p+1}, \ldots, a_q).$$

5. Teorema sobre el cambio del decremento de una permutación al multiplicarla por una transposición (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ con $p \neq q$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi \tau_{p,q}) = \begin{cases} \mathrm{d}(\varphi) - 1, & \text{si } p \text{ y } q \text{ pertenecen a un ciclo en la descomposición de } \varphi; \\ \mathrm{d}(\varphi) + 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

6. Corolario (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algunas transposiciones tales que

$$\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_k.$$

Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi) \le k.$$

7. Corolario (repaso). Sea $\varphi \in S_n$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algunas transposiciones tales que

$$\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_k.$$

Entonces

$$(-1)^k = (-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}.$$

Descomposición de permutaciones en transposiciones

De lo anterior siguen inmediatamente las siguientes proposiciones:

8. Todo ciclo de longitud r es un producto de $r-1$ transposiciones. Sean $a_1, \ldots, a_r$ elementos de $\{1, \ldots, n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_r) = \mathrm{c}_n(a_1, a_2)\,\mathrm{c}_n(a_2, a_3) \cdots \mathrm{c}_n(a_{r-1}, a_r).$$

9. Teorema. Sea $\varphi \in S_n$. Denotemos $\mathrm{d}(\varphi)$ por d. Entonces existen d transposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tales que

$$\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_d.$$

Si $k < d$, entonces no existen transposiciones $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tales que $\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_k$.

En otras palabras, el teorema dice que cualquier permutación φ se puede descomponer en un producto de $\mathrm{d}(\varphi)$ transposiciones y no se puede descomponer en un producto de k transposiciones con $k < d$. Este significa que $\mathrm{d}(\varphi)$ es el número mínimo de factores que se necesitan para descomponer φ en un producto de transposiciones.

10. Ejemplo. Dada una permutación $\varphi \in S_{10}$, calcular $\mathrm{d}(\varphi)$ y descomponer φ en un producto de $\mathrm{d}(\varphi)$ transposiciones. Hacer la comprobación.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 10 & 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución detallada. Descomponemos φ en ciclos disjuntos. Más precisamente, escribimos la representación cíclica canónica completa y la representación cíclica canónica reducida:

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{c}_{10}(1,6,2)\,\mathrm{c}_{10}(3)\,\mathrm{c}_{10}(4,9,7,8)\,\mathrm{c}_{10}(5,10) \\ &= \mathrm{c}_{10}(1,6,2)\,\mathrm{c}_{10}(4,9,7,8)\,\mathrm{c}_{10}(5,10). \end{aligned}$$

De aquí

$$\mathrm{d}(\varphi) = (3-1) + (1-1) + (4-1) + (2-1) = 10 - 4 = 6.$$

Escribimos cada ciclo de longitud r como un producto de $r-1$ transposiciones:

$$\mathrm{c}_{10}(1,6,2) = \mathrm{c}_{10}(1,6)\,\mathrm{c}_{10}(6,2), \qquad \mathrm{c}_{10}(4,9,7,8) = \mathrm{c}_{10}(4,9)\,\mathrm{c}_{10}(9,7)\,\mathrm{c}_{10}(7,8).$$

Obtenemos una descomposición de φ en un producto de 6 transposiciones:

$$\varphi = \tau_{1,6}\tau_{6,2}\tau_{4,9}\tau_{9,7}\tau_{7,8}\tau_{5,10}.$$

Hacemos la comprobación. Recordamos que para multiplicar rápidamente ψ por $\tau_{p,q}$, hay que intercambiar en la segunda fila de ψ los elementos que están en las posiciones p y q.

$$\tau_{1,6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{1,6}\tau_{6,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{1,6}\tau_{6,2}\tau_{4,9} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 7 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{1,6}\tau_{6,2}\tau_{4,9}\tau_{9,7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 4 & 8 & 7 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{1,6}\tau_{6,2}\tau_{4,9}\tau_{9,7}\tau_{7,8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 8 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{1,6}\tau_{6,2}\tau_{4,9}\tau_{9,7}\tau_{7,8}\tau_{5,10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 10 & 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \varphi. \quad \checkmark \qquad \square$$

11. Ejemplo. Dada una permutación $\varphi \in S_9$, calcular $\mathrm{d}(\varphi)$ y descomponer φ en un producto de $\mathrm{d}(\varphi)$ transposiciones. Hacer la comprobación.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución breve.

$$\varphi = \mathrm{c}(1,2,8)\,\mathrm{c}(3,7)\,\mathrm{c}(4,6,9,5) = \tau_{1,2}\tau_{2,8}\tau_{3,7}\tau_{4,6}\tau_{6,9}\tau_{9,5}; \qquad \mathrm{d}(\varphi) = 6.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= (2,1,3,4,5,6,7,8,9); \\ \cdots\tau_{2,8} &= (2,8,3,4,5,6,7,1,9); \\ \cdots\tau_{3,7} &= (2,8,7,4,5,6,3,1,9); \\ \cdots\tau_{4,6} &= (2,8,7,6,5,4,3,1,9); \\ \cdots\tau_{6,9} &= (2,8,7,6,5,9,3,1,4); \\ \cdots\tau_{9,5} &= (2,8,7,6,4,9,3,1,5) = \varphi. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

12. Ejercicio (potencias pares de una transposición). Sea $n \geq 2$ y sea $p \in \{1, 2, \ldots\}$. Muestre que $\tau_{1,2}^{2p} = e$. En otras palabras, cualquier potencia par de una transposición es igual a la permutación identidad.

13. Ejercicio. Sea $n \geq 2$, sea $\varphi \in S_n$ y sea k un número entero mayor o igual que $\mathrm{d}(\varphi)$ y de la misma paridad que $\mathrm{d}(\varphi)$:

$$k \geq \mathrm{d}(\varphi), \qquad (-1)^k = (-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}.$$

Demuestre que existen k transposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$\varphi = \alpha_1 \cdots \alpha_k.$$