

Criterio de matriz diagonalizable

Egor Maximenko y Juan Osornio Uribe

<https://esfm.egormaximenko.com>

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

14 de septiembre de 2026

Objetivos

Demostrar el criterio de matriz diagonalizable,
en términos del polinomio minimal (o en términos de los polinomios anuladores).

Prerrequisitos

- Propiedades del anillo de polinomios $P(K)$ sobre un campo K .
- Cada ideal del anillo $P(K)$ es un ideal principal.
- El teorema de Cayley–Hamilton.
- Polinomios básicos de Lagrange y la partición de la identidad.

1 Polinomios anuladores de una matriz (repaso)

2 Polinomios básicos de Lagrange (repaso)

3 Criterio de matriz diagonalizable

Definition (El polinomio evaluado en una matriz)

Sea K un campo, sea $A \in M_n(K)$ y sea $f \in P(K)$, con

$$f(x) = \sum_{k=0}^p f_k x^k.$$

Se define el polinomio f evaluado en la matriz A como:

$$f(A) := \sum_{k=0}^p f_k A^k = f_p A^p + f_{p-1} A^{p-1} + \cdots + f_1 A + f_0 I_n.$$

Los polinomios evaluados en una matriz A , denotados como $P_A(K)$, forman un anillo conmutativo con identidad:

$$(P_A(K), +, \cdot, I_n).$$

Polinomio anuladores

El polinomio f se dice **anulador** de la matriz A si $f(A) = 0_n$.

$$\text{Anuladores de } A = J_A := \{f \in P(K) \mid f(A) = 0_n\}.$$

El conjunto J_A cumple la propiedad de absorción ($p \cdot J_A \subseteq J_A$), lo cual lo vuelve un ideal:

$$\forall f \in J_A, \forall p \in P(K) \implies (p \cdot f)(A) = p(A) \cdot \underbrace{f(A)}_{=0_n} = 0_n.$$

J_A es no trivial:

$$\text{Cayley-Hamilton} \implies \det(A - xI) \in J_A \setminus \{0\}.$$

J_A es un ideal principal

J_A es generado por un único polinomio mónico minimal.

$$\exists! m = x^\eta + m_1 x^{\eta-1} + \dots + m_\eta \in J_A \quad : \quad J_A = P(K) \cdot m$$

m es minimal respecto al grado del polinomio mónico:

$$\forall \tau = x^s + \tau_1 x^{s-1} + \dots + \tau_s \in P(K), \quad \deg(\tau) < \deg(m) \implies \tau(A) \neq 0_n$$

Sean $A \sim B$ matrices similares: $A = PDP^{-1}$

$$(A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1} \wedge \alpha A = P(\alpha D)P^{-1}) \implies (f(A) = Pf(D)P^{-1}).$$

Por lo tanto:

Las matrices similares tienen el mismo polinomio minimal y el mismo conjunto de anuladores.

Los polinomios anuladores de una matriz diagonal

$$\left(D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \wedge \quad f \in P(K) \right) \implies f(D) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)).$$

Entonces:

$$L_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) \in J_A, \quad \text{pero no es necesariamente el m\u00ednimo.}$$

Consideremos $\{\xi_1, \dots, \xi_m\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, donde $\xi_1, \dots, \xi_m$ son distintos los unos de los otros:

$$\text{Anulador minimal de } D = m_A(x) = \underbrace{\prod_{i=1}^m (x - \xi_i)}_{\text{producto de polinomios m\u00f3nicos de grado 1 sin repetici\u00f3n}}$$

Polinomios básicos de Lagrange (repaso de la definición)

Supongamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son algunos números complejos, distintos por pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$, definimos

$$c_j := \frac{1}{\prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} (\alpha_j - \alpha_k)},$$

$$h_j(x) := c_j \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} (x - \alpha_k).$$

Además, introducimos

$$f(x) := \prod_{j=1}^m (x - \alpha_j).$$

Algunas propiedades de los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

- $h_j(\alpha_k) = \delta_{j,k}$.
- $c_j f(x) = (x - \alpha_j)h_j(x)$.
- $\sum_{j=1}^m h_j = 1$.
- Si $j \neq k$, entonces $f \mid h_j h_k$.
- Para cada j , $(x - \alpha_j) \mid (1 - h_j)$.

Criterio de matriz diagonalizable

Teorema

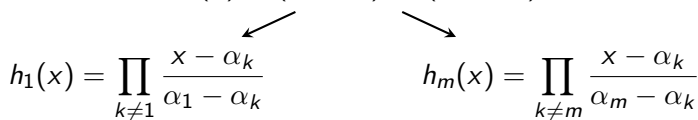
Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si el polinomio minimal de A se descompone en raíces simples, entonces A es diagonalizable.

Descomposición por Polinomios de Lagrange

$$m_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)$$

Descomposición por Polinomios de Lagrange

$$m_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)$$


$$h_1(x) = \prod_{k \neq 1} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_k}$$

$$h_m(x) = \prod_{k \neq m} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_m - \alpha_k}$$

Descomposición por Polinomios de Lagrange

$$\begin{array}{ccc} m_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) & & \\ \swarrow \quad \searrow & & \\ h_1(x) = \prod_{k \neq 1} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_k} & & h_m(x) = \prod_{k \neq m} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_m - \alpha_k} \\ \underbrace{\hspace{10em}} & & \\ \downarrow & & \\ 1_{P(K)} = h_1 + \cdots + h_m & & \end{array}$$

Descomposición por Polinomios de Lagrange

$$\begin{array}{ccc} m_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) & & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_1(x) = \prod_{k \neq 1} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_k} & & h_m(x) = \prod_{k \neq m} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_m - \alpha_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1_{P(K)} = h_1 + \cdots + h_m & & \\ \downarrow & & \\ I_n = h_1(A) + \cdots + h_m(A) = \sum_{i=1}^m P_i; \quad P_k := h_k(A). & & \end{array}$$

Descomposición por Polinomios de Lagrange

$$\begin{array}{ccc} m_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) & & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_1(x) = \prod_{k \neq 1} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_1 - \alpha_k} & & h_m(x) = \prod_{k \neq m} \frac{x - \alpha_k}{\alpha_m - \alpha_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1_{P(K)} = h_1 + \cdots + h_m & & \\ \downarrow & & \\ I_n = h_1(A) + \cdots + h_m(A) = \sum_{i=1}^m P_i; \quad P_k := h_k(A). & & \\ \downarrow & & \\ \mathbb{K}^n = \sum_{i=1}^m \operatorname{im} P_i. & & \end{array}$$

Propiedades de P_i

Si $j \neq k$, entonces $h_j h_k$ tiene todos los factores de m_A , ergo

$$h_j(A)h_k(A) = P_j P_k = 0.$$

Propiedades de P_i

Si $j \neq k$, entonces $h_j h_k$ tiene todos los factores de m_A , ergo

$$h_j(A)h_k(A) = P_j P_k = 0.$$

Por lo tanto,

$$P_j^2 = P_j \left(I - \sum_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} P_k \right) = P_j.$$

Propiedades de P_i

Si $j \neq k$, entonces $h_j h_k$ tiene todos los factores de m_A , ergo

$$h_j(A)h_k(A) = P_j P_k = 0.$$

Por lo tanto,

$$P_j^2 = P_j \left(I - \sum_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} P_k \right) = P_j.$$

$$P_j^2 = P_j.$$

En particular, esto implica que $\text{im}(P_j) = \ker(I - P_j)$.

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \implies \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \Longrightarrow \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \implies \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0 \quad \implies \quad (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \implies P_i(A - \alpha_i I) = 0 \implies (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

$$x - \alpha_j \mid 1 - h_j$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \implies P_i(A - \alpha_i I) = 0 \implies (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

$$x - \alpha_j \mid 1 - h_j \implies 1 - h_j = q(x)(x - \alpha_j)$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \Longrightarrow \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

$$x - \alpha_j \mid 1 - h_j \quad \Longrightarrow \quad 1 - h_j = q(x)(x - \alpha_j) \quad \Longrightarrow \quad I - P_j = q(A)(A - \alpha_j I)$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \Longrightarrow \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

$$x - \alpha_j \mid 1 - h_j \quad \Longrightarrow \quad 1 - h_j = q(x)(x - \alpha_j) \quad \Longrightarrow \quad I - P_j = q(A)(A - \alpha_j I)$$

$$\therefore \ker(A - \alpha_j I) \subseteq \ker(I - P_j) = \text{im } P_j.$$

$$\text{im}(P_j) = \ker(A - \alpha_j I)$$

Los subespacios $\text{im}(P_j)$ son subespacios propios

$$h_i(x)(x - \alpha_i) \in J_A \quad \Longrightarrow \quad P_i(A - \alpha_i I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \alpha_i I)P_i = 0$$

$$\therefore \text{im } P_i \subseteq \ker(A - \alpha_i I).$$

$$x - \alpha_j \mid 1 - h_j \quad \Longrightarrow \quad 1 - h_j = q(x)(x - \alpha_j) \quad \Longrightarrow \quad I - P_j = q(A)(A - \alpha_j I)$$

$$\therefore \ker(A - \alpha_j I) \subseteq \ker(I - P_j) = \text{im } P_j.$$

$$\text{im}(P_j) = \ker(A - \alpha_j I) \quad \mathbb{K}^n = \bigoplus_{j=1}^n \ker(A - \alpha_j I)$$