Matrices diagonales por bloques

Objetivos. Definir matrices diagonales por bloques y enunciar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matrices diagonales, operaciones lineales con matrices, multiplicación de matrices, rango de una matriz, determinante de una matriz, polinomio característico de una matriz.

1. Notación (matriz diagonal por bloques).
Sean $B_1 \in \mathcal{M}_{k_1}(\mathbb{F}), B_2 \in \mathcal{M}_{k_2}(\mathbb{F}), \ldots, B_m \in \mathcal{M}_{k_m}(\mathbb{F})$. Entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_k \end{bmatrix}$$

se denota por

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m).$$

2. Ejemplo.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = 4, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3) = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Proposición (propiedades de matrices diagonales por bloques).
Sean

$$A = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_m), \qquad C = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_m),$$

donde para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$ las matrices B_j y D_j son cuadradas y del mismo orden: $C_j, D_j \in \mathcal{M}_{d_j}(\mathbb{F})$. Entonces:

1. $A + C = \operatorname{diag}(B_1 + D_1, \ldots, B_m + D_m)$.
2. $\lambda A = \operatorname{diag}(\lambda B_1, \ldots, \lambda B_m) \quad$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.
3. $AC = \operatorname{diag}(B_1 D_1, \ldots, B_m D_m)$.
4. $A^k = \operatorname{diag}(B_1^k, \ldots, B_m^k) \quad$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
5. $f(A) = \operatorname{diag}(f(B_1), \ldots, f(B_m)) \quad$ para todo $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.
6. $\displaystyle \operatorname{r}(A) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{r}(B_j)$.
7. $\displaystyle \det(A) = \prod_{j=1}^{m} \det(B_j)$.
8. A es invertible si, y sólo si, todos los bloques $B_1, \ldots, B_m$ son invertibles.
9. $\lambda I_n - A = \operatorname{diag}(\lambda I_{d_1} - B_1, \ldots, \lambda I_{d_m} - B_m)$.
10. $\displaystyle \operatorname{C}_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} \operatorname{C}_{B_j}(\lambda)$.
11. $\displaystyle \operatorname{sp}(A) = \bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{sp}(B_j)$.

Las demostraciones necesitan mucho trabajo técnico y no se incluyen en este curso. Es suficiente considerar el caso $m = 2$ y luego aplicar la inducción matemática sobre m. Las propiedades más importantes y no triviales son 3 y 6.