Representación matricial de una forma bilineal

Objetivos. Definir la matriz asociada a una forma bilineal respecto a una base. Estudiar la correspondencia entre formas bilineales y matrices.

Requisitos. Formas bilineales, matriz de cambio de base, matriz transpuesta.

1. Definición (matriz asociada a una forma bilineal con respecto a una base). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ de dimensión finita n, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Entonces la *matriz asociada a la forma bilineal f respecto a la base $\mathcal{B}$* se define como

$$f_{\mathcal{B}} \coloneqq \big[f(b_i, b_j)\big]_{i,j=1}^{n}.$$

La matriz asociada a una forma bilineal sirve para expresar el valor $f(u, v)$ a través de las coordenadas de u y v. Para demostrar la fórmula correspondiente, necesitamos dos lemas.

2. Lema (representación de una forma bilineal en coordenadas). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n$, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Entonces para todos $u, v \in V$,

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i f(b_i, b_j), \tag{1}$$

donde $x = u_{\mathcal{B}}$, $y = v_{\mathcal{B}}$.

Demostración. Por la definición de las coordenadas de un vector con respecto a una base,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j.$$

Aplicando la linealidad de f con respecto al primer argumento y luego con respecto al segundo argumento, obtenemos (1):

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(b_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(b_i, b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(b_i, b_j). \end{aligned} \qquad \square$$

3. Observación. La fórmula (1) implica, en particular, que la forma bilineal f se determina de manera única por los números $f(b_i, b_j)$, esto es, por sus valores en los pares de los vectores básicos.

4. Lema (producto de un renglón por una matriz por una columna). Sean $x, y \in \mathbb{F}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces

$$x^\top Ay = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_i y_j.$$

Demostración. Notemos que $x^\top Ay$ es una matriz de tamaño 1×1 y se identifica con un escalar.

$$x^\top Ay = \sum_{i=1}^{n} x_i (Ay)_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_i y_j. \qquad \square$$

5. Teorema (representación matricial de una forma bilineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Entonces para todos $u, v \in V$

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^\top f_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sigue de los lemas. $\square$

6. Teorema (unicidad de la matriz que representa una forma bilineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n$, sea $\mathcal{B}$ una base en V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y para todos $u, v \in V$

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^\top A v_{\mathcal{B}}.$$

Entonces $f_{\mathcal{B}} = A$.

Demostración. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ índices arbitrarios. Mostremos que $f(b_p, b_q) = A_{p,q}$. Recordamos que

$$(b_p)_{\mathcal{B}} = e_p = \left[\delta_{p,i}\right]_{i=1}^{n}, \qquad (b_q)_{\mathcal{B}} = e_q = \left[\delta_{q,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Aplicando la definición del producto de matrices, tenemos lo siguiente:

$$f(b_p, b_q) = (b_p)_{\mathcal{B}}^\top A (b_q)_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{p,i} A_{i,j} \delta_{q,j} = A_{p,q}. \qquad \square$$

7. Ejercicio (construcción de una forma bilineal con la matriz asociada dada). Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Muestre que existe una única forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(V)$ tal que $f_{\mathcal{B}} = A$.

Cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio

8. Proposición (del cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ una forma bilineal en V y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Entonces

$$f_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}. \tag{2}$$

9. Corolario (el rango de la matriz de una forma bilineal no depende de la base). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ una forma bilineal en V y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Entonces

$$\mathrm{r}(f_{\mathcal{A}}) = \mathrm{r}(f_{\mathcal{B}}).$$

Demostración. Recordemos que el rango de una matriz de se cambia al multiplicarla por una matriz invertible del lado izquierdo o derecho. Formalmente, si A es una matriz, B y C son matrices invertibles, entonces

$$\mathrm{r}(BAC) = \mathrm{r}(A).$$

Ahora de la fórmula (2) obtenemos que $\mathrm{r}(f_{\mathcal{A}}) = \mathrm{r}(f_{\mathcal{B}})$ porque la matriz $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ y su transpuesta son invertibles. $\square$

10. Definición (el rango de una forma bilineal). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. El *rango* de f se define como el rango de la matriz asociada a f con respecto a cualquier base. El corolario anterior justifica que la definición es correcta.

11. Ejercicio (isomorfismo entre formas bilineales y matrices). Sea V espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$. Demuestre que el espacio vectorial $\mathcal{BL}(V)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Construya isomorfismos correspondientes (directo e inverso). Como un corolario se obtiene de aquí que

$$\dim(\mathcal{BL}(V)) = n^2.$$

12. Ejercicio. Enuncie y demuestre el criterio de que una forma bilineal sea simétrica o antisimétrica en términos de su matriz en alguna base.

13. Tarea adicional. Construya bases de los espacios vectoriales de matrices simétricas y matrices antisimétricas. Calcule las dimensiones de los espacios de formas bilineales simétricas y antisimétricas.