Polinomios anuladores y el polinomio mínimo de un operador lineal

Objetivos. Definir polinomios anuladores y el polinomio mínimo de un operador lineal, estudiar sus propiedades.

Requisitos. Polinomio evaluado en un operador lineal, polinomio característico de un operador lineal, teorema de Hamilton–Cayley, anillo de polinomios es un dominio de ideales principales (cada ideal está generado por algún elemento).

Polinomios anuladores de un operador lineal

1. Definición (polinomio anulador de un operador lineal). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Se dice que f es un *polinomio anulador* de T si $f(T) = \mathbf{0}$.

2. Proposición (los polinomios anuladores de un operador lineal forman un ideal). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Definimos

$$\mathcal{A}_T \coloneqq \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \colon \ f(T) = \mathbf{0}\}.$$

Entonces $\mathcal{A}_T$ es un ideal del anillo $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, esto es:

1. Si $f, g \in \mathcal{A}_T$, entonces $f + g \in \mathcal{A}_T$.
2. Si $f \in \mathcal{A}_T$ y $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, entonces $fg \in \mathcal{A}_T$.
3. $0 \in \mathcal{A}_T$.
4. $1 \notin \mathcal{A}_T$.

$\mathcal{A}_T$ se llama el *ideal de los polinomios anuladores de* T.

Idea de demostración. Sigue fácilmente de las fórmulas

$$(f+g)(T) = f(T) + g(T), \qquad (fg)(T) = f(T)g(T), \qquad 1(T) = I. \qquad \square$$

3. Proposición. Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\mathcal{A}_T \neq \{\mathbf{0}\}$.

Demostración. Por el teorema de Cayley–Hamilton, $\mathrm{C}_T \in \mathcal{A}_T$. $\square$

Polinomio mínimo de un operador lineal

4. El anillo de los polinomios es un dominio de ideales principales (repaso). Recordamos que $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ es un *dominio de ideales principales*, esto es, para cualquier ideal J de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ existe un polinomio g tal que $J = g \cdot \mathcal{P}(\mathbb{F})$. En esta situación se dice que g *genera* a J. El papel de g puede hacer cualquier elemento no nulo de J de grado mínimo. El polinomio g con la propiedad que $J = g \cdot \mathcal{P}(\mathbb{F})$ se determina de manera única salvo multiplos constantes no nulos. Para garantizar la unicidad de g se pide que g sea un polinomio *mónico*, es decir, que tenga el mayor coeficiente igual a 1.

5. Definición (polinomio mínimo de un operador lineal). Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. El *polinomio mínimo* de T se define como el polinomio mónico que genera al ideal $\mathcal{A}_T$ de los polinomios anuladores de T:

$$\mathcal{A}_T = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \colon f(T) = \mathbf{0}\}$$

El polinomio mínimo de T se denota por μ_T.

Otra definición (equivalente): el *polinomio mínimo* de T es polinomio mónico de grado mínimo entre todos los polinomios anuladores no nulos que anulan al operador T.

Como vimos en el tema “Ideales de polinomios”, el polinomio elegido según la segunda definición automáticamente satisface la primera definición. En otras palabras, el polinomio mínimo de T tiene las siguientes propiedades:

- μ_T es mónico.
- $\mu_T(T) = 0$, esto es, $\mu_T \in \mathcal{A}_T$.
- Si $f \in \mathcal{A}_T$, entonces $\mu_T \mid f$.

6. Proposición (el polinomio mínimo divide al polinomio característico). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$\mu_T \mid \mathrm{C}_T\,.$$

Demostración. Por el teorema de Cayley–Hamilton, $\mathrm{C}_T \in \mathcal{A}_T$. Por la definición del polinomio mínimo, μ_T genera al ideal $\mathcal{A}_T$, así que μ_T divide a todo elemento de $\mathcal{A}_T$. □

7. Proposición (aplicación del polinomio de un operador lineal a un vector propio del mismo operador, repaso). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, $u \in \ker(\lambda I - T)$. Entonces

$$f(T)u = f(\lambda)u.$$

8. Proposición (de las raíces del polinomio mínimo). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces μ_T tiene las mismas raíces que C_T. En otras palabras, el conjunto de las raíces de μ_T coincide con el espectro de T.

Demostración. 1. Como μ_T divide a C_T, cualquier raíz de μ_T es también una raíz de C_T. En efecto, existe un polinomio $h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $\mathrm{C}_T = \mu_T h$. Si λ es una raíz de μ_T, esto es, $\mu_T(\lambda) = 0$, entonces

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \mu_T(\lambda)h(\lambda) = 0.$$

2. Sea λ una raíz de C_T. Entonces λ es un valor propio de T, y existe un vector $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $Tv = \lambda v$. De allí obtenemos que $f(T)v = f(\lambda)v$ para cualquier polinomio $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Ponemos $f = \mu_T$:

$$\mu_T(T)v = \mu_T(\lambda)v.$$

Pero $\mu_T(T) = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\mu_T(\lambda) = 0$. $\square$

9. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aquí $\mu_A(\lambda) = \mathrm{C}_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$.

10. Ejemplo. Sea $I = I_n$ la matriz identidad de orden n. Entonces

$$\mathrm{C}_I(\lambda) = (\lambda - 1)^n, \qquad \mu_I(\lambda) = \lambda - 1.$$

11. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, $\mathrm{C}_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$.

12. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Ejercicio (polinomio mínimo de la matriz transpuesta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A y $A^\top$ tienen los mismos ideales anuladores:

$$\big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}):\ f(A) = \mathbf{0}_{n\times n}\big\} = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}):\ f(A^\top) = \mathbf{0}_{n\times n}\big\}.$$

Deduzca de aquí que $\mu_{A^\top} = \mu_A$.

15. Ejercicio. Sea T un operador lineal tal que $\mu_T(\lambda) = \lambda^2 + 2$. Calcule T^{10}.

Sugerencias. 1. $T^2 + 2I = \mu_T(T) = \mathbf{0}$, de aquí podemos despejar T^2 y luego calcular T^{10}.

2. Otro método: dividir el polinomio λ^{10} entre $\lambda^2 + 2$ con residuo, esto es, encontrar polinomios q y r tales que $\deg(r) < 2$ y

$$\lambda^{10} = (\lambda^2 + 2)q(\lambda) + r(\lambda),$$

y luego sustitur en esta igualdad λ por T. $\square$

16. Ejercicio (demostrar la existencia de un polinomio anulador no nulo sin usar el teorema de Cayley–Hamilton). Demuestre que $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ sin usar el teorema de Cayley–Hamilton, basándose en el hecho que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{F})) = n^2$. Más precisamente, demuestre que existe un polinomio $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ de grado $\deg(f) \leq n^2$ tal que $f(T) = \mathbf{0}$. Notemos que el teorema de Cayley–Hamilton es más preciso porque nos proporciona un polinomio anulador de grado n.