Matriz adjunta clásica y su propiedad principal

Objetivos. Definir la matriz adjunta clásica (matriz de cofactores transpuesta) y demostrar su propiedad principal.

Requisitos. Cofactores, expansión del determinante por cofactores, operaciones con matrices, matriz transpuesta.

1. Nota sobre notaciones. En estos apuntes denotamos por $A_{i,j}$ a la (i,j)-ésima entrada de la matriz A y por $\widehat{A}_{i,j}$ al cofactor de la (i,j)-ésima entrada de la matriz A.

2. Ejemplo de introducción. Consideremos una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

El teorema de la expansión del determinante por cofactores dice que la suma de las entradas de un renglón multiplicados por sus cofactores es igual al determinante de la matriz. Por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{3} A_{3,j} \widehat{A}_{3,j} = \det(A).$$

¿Y qué pasa al multiplicar las entradas de un renglón por los cofactores de las entradas de otro renglón y sumar los productos? Por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{3} A_{3,j} \widehat{A}_{2,j} = ?$$

Para explicar el último resultado, calculemos también $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} B_{2,j} \widehat{B}_{2,j}$, donde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Lema (suma de las entradas de un renglón multiplicadas por los cofactores de las entradas de otro renglón). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \widehat{A}_{q,j} = 0. \tag{1}$$

Dada una matriz cuadrada arbitraria, la suma de las entradas de un renglón multiplicadas por los cofactores de las entradas correspondientes de otro renglón, es igual a 0.

Demostración. Consideremos la matriz auxiliar $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, cuyo q-ésimo renglón es igual al p-ésimo renglón de la matriz A, y todos los demás renglones coinciden con los renglones correspondientes de A:

$$B_{i,j} \coloneqq \begin{cases} A_{i,j}, & \text{si } i \neq q; \\ A_{p,j}, & \text{si } i = q. \end{cases}$$

Notemos que el cofactor de la forma $\widehat{A}_{q,j}$, $1 \le j \le n$, no depende del q-ésimo renglón de A y por lo tanto coincide con $\widehat{B}_{q,j}$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{q,j} &= (-1)^{q+j} M_A \begin{pmatrix} \{1,\ldots,n\} \setminus \{q\} \\ \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{q+j} M_B \begin{pmatrix} \{1,\ldots,n\} \setminus \{q\} \\ \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\} \end{pmatrix} \\ &= \widehat{B}_{q,j}. \end{aligned}$$

Además, $A_{p,j} = B_{q,j}$. Por eso la suma escrita en el lado izquierdo de (1) es igual a

$$\sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \widehat{A}_{q,j} = \sum_{j=1}^{n} B_{q,j} \widehat{B}_{q,j}.$$

Por el teorema de la expansión de una matriz por cofactores, la última suma es igual a $\det(B)$. Pero la matriz B tiene dos renglones iguales: $B_{q,*} = A_{p,*} = B_{p,*}$. Por consecuencia, $\det(B) = 0$. □

4. Ejercicio. Enunciar y demostrar el resultado análogo para las columnas.

5. Definición (matriz adjunta clásica, matriz de cofactores transpuesta). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, sea

$$\operatorname{adj}(A) \coloneqq \left[\widehat{A}_{j,i}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

En otras palabras, la matriz $\operatorname{adj}(A)$ se obtiene de la matriz A al sustituir cada entrada por su cofactor y pasar a la matriz transpuesta. La matriz $\operatorname{adj}(A)$ se llama la *matriz adjunta clásica* de A o la *matriz de cofactores transpuesta*.

6. Nota. El término "matriz adjunta" tiene otro significado (la matriz transpuesta conjugada). Por eso para la matriz transpuesta de cofactores se usa el término "matriz adjunta clásica" o "matriz adjugada".

7. Ejercicio. Calcule $\operatorname{adj}(A)$ si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Teorema (propiedad principal de la matriz adjunta clásica). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, I_n.$$

Demostración. Calculemos la (p, q)-ésima entrada del producto $A \operatorname{adj}(A)$:

$$\big(A \operatorname{adj}(A)\big)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k}(\operatorname{adj}(A))_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{q,k}.$$

Vamos a simplificar la última suma. Si $p = q$, aplicamos el teorema sobre la expansión de una matriz por cofactores:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{p,k} = \det(A).$$

Si $p \neq q$, aplicamos el lema anterior:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\widehat{A}_{q,k} = 0.$$

Unimos dos casos:

$$(A \operatorname{adj}(A))_{p,q} = \det(A)\delta_{p,q}.$$

Acabamos de demostrar que $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$. La demostración de la igualdad $\operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)I_n$ es similar. □

9. Ejercicio. Escribir la demostración de la igualdad $\operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)I_n$.

10. Ejercicio. Calcular la matriz $\operatorname{adj}(A)$ para una matriz general $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

11. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz no invertible. Demuestre que cualquier columna de su matriz adjunta clásica $\operatorname{adj}(A)$ es una solución de la ecuación $Ax = \mathbf{0}_n$.