Operaciones con matrices

Tareas adicionales

Los problemas auxiliares de estas tareas adicionales no son muy difíciles y corresponden al nivel obligatorio de conocimientos. Los problemas principales de estas tareas adicionales no se incluyen en los exámenes.

Propiedades de sumas

En todos los problemas de esta sección se supone que $\alpha_i, \beta_i, \lambda$ son elementos de un campo $\mathbb{F}$, por ejemplo del campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Problemas auxiliares

1. Escriba la definición inductiva de la suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j$.

Demuestre las siguientes propiedades, escribiendo las sumas de manera explícita (todos los sumandos) y justificando todas las igualdades:

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j + \sum_{j=1}^{3} \beta_j.$

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \lambda\alpha_j = \lambda \sum_{j=1}^{3} \alpha_j.$

4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{j,k} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j,k}.$

Problemas principales

5. Propiedad aditiva de la suma. Demuestre que para todo $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j.$$

6. Propiedad homogénea de la suma. Demuestre que para todo $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda \alpha_j = \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_j.$$

7. Intercambio de las sumas. Demuestre que para todo $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y todo $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,k}.$$

Indicación: trate p como un parámetro fijo y aplique el método de inducción matemática sobre m.

El campo de números complejos

Los números complejos se pueden construir como pares ordenados de números reales, con ciertas operaciones.

Problemas auxiliares

8. Igualdad de pares ordenados. Sean $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. ¿Cuándo se dice que los pares ordenados (x, y) y (u, v) son iguales?.

9. Definición de operaciones en $\mathbb{C}$. Sean $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$. Recuerde la definición de $z + w$ y de zw.

10. Propiedad conmutativa de la adición. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que $z + w = w + z$. Indicación: usar la definición de la adición en $\mathbb{C}$ y la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$.

11. Número complejo neutro aditivo. Demuestre que el par ordenado $(0, 0)$ es un elemento neutro aditivo en $\mathbb{C}$.

12. Construcción del inverso aditivo de un número complejo. Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Encuentre un número $w = (u, v) \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = (0, 0)$.

13. Propiedad conmutativa de la multiplicación. Enuncie y demuestre la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{C}$.

14. Número complejo neutro multiplicativo. Encuentre un elemento neutro multiplicativo en $\mathbb{C}$.

Problemas principales

15. Propiedades asociativas y propiedad distributiva. Enuncie y demuestre la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{C}$, la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{C}$ y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en $\mathbb{C}$.

16. Descripción de números complejos no nulos. Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Muestre que la condición $z \neq (0, 0)$ es equivalente a la condición $x^2 + y^2 > 0$.

17. Construcción del inverso multiplicativo. Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$. Encuentre un número $w = (u, v) \in \mathbb{C}$ tal que $zw = (0, 1)$.

El campo de dos elementos

Consideramos el conjunto $\mathbb{F}_2$ de dos elementos $\{\alpha, \beta\}$ con las siguientes operaciones llamadas *adición* y *multiplicación*:

$$\begin{array}{c|cc} + & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \end{array}$$

Problemas auxiliares

18. Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{F}_2$. Demuestre la propiedad conmutativa para la operación $+$:

x	y	$x+y$	$y+x$
α	α		
α	β		
β	α		
β	β		

Otra manera de demostrar la propiedad conmutativa: notar que la tabla de adición es simétrica (respecto a la diagonal principal).

19. Demuestre la propiedad conmutativa de la multiplicación.

20. Determine cuál de los dos elementos de $\mathbb{F}_2$ es el elemento neutro aditivo. Justifique la respuesta.

21. Determine cuál de los dos elementos es el elemento neutro multiplicativo. Justifique la respuesta.

22. ¿Cuál es la notación natural para los dos elementos de $\mathbb{F}_2$?.

23. Escriba las tablas de adición y multiplicación usando la notación natural para los elementos de $\mathbb{F}_2$.

El campo de dos elementos, problemas principales

24. Existencia de inversos aditivos en $\mathbb{F}_2$. Para todo elemento de $\mathbb{F}_2$ encuentre su inverso aditivo. Justifique las respuestas.

25. Existencia de inversos multiplicativos en $\mathbb{F}_2$. Para todo elemento de $\mathbb{F}_2$ distinto del elemento neutro aditivo (cero) encuentre su inverso multiplicativo. Justifique las respuestas.

26. Propiedad distributiva en $\mathbb{F}_2$. Demuestre que la multiplicación en $\mathbb{F}_2$ es distributiva con respecto a la adición:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{F}_2 \qquad x(y+z) = xy + xz.$$

Hay que llenar bien la siguiente tabla:

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
α	α	α					
α	α	β					
α	β	α					
α	β	β					
β	α	α					
β	α	β					
β	β	α					
β	β	β					

27. Propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{F}_2$. Demuestre que la adición en $\mathbb{F}_2$ cumple con la propiedad asociativa. Hay que llenar una tabla parecida a la tabla del problema anterior, pero con las columnas

$$x, \qquad y, \qquad z, \qquad x+y, \qquad (x+y)+z, \qquad y+z, \qquad x+(y+z).$$

28. Propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{F}_2$. Demuestre que la multiplicación en $\mathbb{F}_2$ cumple con la propiedad asociativa.

Estructura del producto de matrices

Problemas auxiliares

29. Sean $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Muestre que el segundo renglón del producto AB se puede escribir como una combinación lineal de los renglones de B.

30. Sean A y B como en el problema anterior. Muestre que la tercera columna del producto AB se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de A.

31. Escriba la definición formal de $A_{p,*}$ y de $A_{*,q}$.

Problemas principales

32. Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Muestre que todo renglón del producto AB se puede escribir como una combinación lineal de los renglones de B.

33. Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Muestre que toda columna del producto AB se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de A.

Matrices básicas

Problemas auxiliares

Se consideran las matrices de tamaño $n \times n$ que tienen una entrada igual a 1 y las demás iguales a 0.

34. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Escriba la definición formal de $E_{p,q}$ usando la delta de Kronecker.

35. Para $n = 3$ escriba las matrices $E_{1,3}$, $E_{2,2}$ y $E_{3,2}$.

36. Ejemplos de productos por matrices básicas. Sea $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{F})$ una matriz con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Calcule los productos $AE_{2,1}$, $AE_{2,2}$, $E_{2,2}A$ y $E_{1,3}A$.

37. Tabla de multiplicación de las matrices básicas de tamaño 2×2. Calcule todos los productos $E_{p,q}E_{r,s}$, donde $p, q, r, s \in \{1, 2\}$, y llene la siguiente tabla de multiplicación. En la entrada ubicada en la intersección del renglón $E_{p,q}$ y columna $E_{r,s}$ se escribe el producto $E_{p,q}E_{r,s}$:

	$E_{1,1}$	$E_{1,2}$	$E_{2,1}$	$E_{2,2}$
$E_{1,1}$				
$E_{1,2}$				
$E_{2,1}$				
$E_{2,2}$				

38. Matrices escalares conmutan con todas las matrices.
Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y sea $X = \lambda I_n$. Se dice que X es una *matriz escalar*. Demuestre que X conmuta con cualquier matriz Y perteneciente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \qquad XY = YX.$$

39. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$. ¿Qué condición deben satisfacer las entradas de A para que se cumpla la igualdad $AE_{1,3} = E_{1,3}A$?.

40. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$. ¿Qué condición deben satisfacer las entradas de A para que se cumpla la igualdad $AE_{2,2} = E_{2,2}A$?.

Matrices básicas, problemas principales

41. Productos por las matrices básicas.
Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule los productos $AE_{p,q}$ y $E_{p,q}A$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es una matriz arbitraria.

42. Fórmula para el producto de las matrices básicas.
Escriba y demuestre una fórmula para el producto $E_{p,q}E_{r,s}$, donde $p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Use la delta de Kronecker.

43. Teorema de Schur de las matrices que conmutan con todas las matrices.
Supongamos que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es una matriz que conmuta con todas las matrices pertenecientes a $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \qquad XY = YX.$$

Demuestre que X es una *matriz escalar*, esto es, existe un $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $X = \lambda I_n$. Sugerencia: poniendo $Y = E_{p,q}$ para varios índices p y q se obtienen ciertas condiciones sobre las entradas de X.

Propiedades de las potencias enteras no negativas de una matriz cuadrada

Problemas auxiliares

44. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Escriba la definición inductiva de A^p, donde $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

i) Defina A^0.

ii) Defina A^{p+1} a través de A^p.

Problemas principales

45. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Demuestre por inducción (sobre la variable q) que para todo $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la fórmula:

$$A^p A^q = A^{p+q}.$$

46. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Demuestre por inducción (sobre la variable q) que para todo $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la fórmula:

$$(A^p)^q = A^{pq}.$$

47. Construya un par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ con entradas 0 y 1 tales que

$$(AB)^2 \neq A^2 B^2.$$

48. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA$. Demuestre por inducción que para cualquier $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la fórmula:

$$(AB)^p = A^p B^p.$$