Producto interno

Tareas adicionales

En estos problemas se supone que V es un espacio vectorial complejo dotado con un producto interno. Se supone que el producto interno es lineal respecto al segundo argumento.

Criterio de la igualdad en la desigualdad de Schwarz

Problemas auxiliares

1. Repase la demostración de la desigualdad de Schwarz.

2. Sea $v \in V$. Recuerde cuál es la condición necesaria y suficiente para que $\langle v, v \rangle = 0$.

3. Igualdad de números relacionados por una cadena de desigualdades. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ algunos números reales tales que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_m.$$

Supongamos que $\alpha_1 = \alpha_m$. Demuestre que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m.$$

4. Criterio para que dos vectores sean linealmente dependientes (repaso). Sea V un espacio vectorial complejo y sean $a, b \in V$. Demuestre que a y b son linealmente dependientes si, y sólo si, se cumple una de las siguientes dos condiciones:

1) $a = \mathbf{0}_V$;

2) $a \neq \mathbf{0}_V$ y existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $b = \lambda a$.

Problema principal

5. Sean $a, b \in V$. Determine cuándo se cumple la igualdad

$$|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \, \langle b, b \rangle.$$

Criterio de la igualdad en la propiedad subaditiva de la norma inducida por un producto interno

Problemas auxiliares

6. Repase la demostración de la propiedad subaditiva de la norma inducida por un producto interno.

7. Igualdad de números relacionados por una cadena de desigualdades. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ algunos números reales tales que

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_m.$$

Supongamos que $\alpha_1 = \alpha_m$. Demuestre que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m.$$

8. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Repase la demostración de la desigualdad

$$\operatorname{Re}(\alpha) \le |\alpha|.$$

9. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Determine cuándo se cumple la igualdad

$$\operatorname{Re}(\alpha) = |\alpha|.$$

10. Repase el criterio de la igualdad en la desigualdad de Schwarz.

Problema principal

11. Sean $a, b \in V$. Determine cuándo se cumple la igualdad

$$\|a + b\| = \|a\| + \|b\|.$$

Producto interno definido por una integral

En estos problemas se supone que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Problemas auxiliares

12. Sea $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ y sea $\gamma \in [\alpha, \beta]$. ¿Cuándo se dice que la función g es continua en el punto γ? Hay que repasar la definición en el lenguaje ε-δ.

13. Sean $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tal que $g(\gamma) > 0$ y $v \in (0, g(\gamma))$. Usando la definición de la continuidad demuestre que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \cap (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \qquad g(x) \geq v.$$

14. Sea $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ y sea $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tal que $f(\gamma) \neq 0$. Demuestre que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \cap (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \qquad |f(x)| \geq \frac{|f(\gamma)|}{2}.$$

Muestre que si $\delta \leq \beta - \alpha$, entonces la longitud del intervalo $[\alpha, \beta] \cap (\gamma - \delta, \gamma + \delta)$ es mayor o igual a $\delta/2$.

Problemas principales

15. Sea $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ y sea $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tal que $f(\gamma) \neq 0$. Demuestre que

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 \, dx > 0.$$

16. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial complejo $\mathcal{P}(\mathbb{C})$:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\alpha}^{\beta} \overline{f(x)} g(x) \, dx.$$

Desigualdad de Ptolomeo (Ptolemy's inequality)

En estos problemas se supone que V es un espacio vectorial complejo dotado con un producto interno. Se denota por $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interno.

Agradezco al físico italiano Bruno Galvan por enseñarme estos problemas. Thanks to Bruno Galvan (a physicist from Italy, `http://www.brunogalvan.it`) who showed me these problems.

Problemas auxiliares

17. Sean $a, b \in V$. Simplifique la expresión

$$\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle.$$

18. Sean $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Simplifique la expresión

$$\|\lambda a + b\|^2.$$

19. Sean $a, b \in V$ tales que $\|a\| = \|b\| = 1$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\|\lambda a + b\| = \|a + \lambda b\|.$$

20. Sean $a, b \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$. Simplifique la expresión

$$\|a\|\,\|b\| \left\| \frac{a}{\|a\|^2} - \frac{b}{\|b\|^2} \right\|.$$

Problemas principales

21. Desigualdad de Ptolomeo. Sean $a, b, c \in V$. Demuestre que

$$\|a - b\|\,\|c\| \le \|b - c\|\,\|a\| + \|c - a\|\,\|b\|.$$

22. Una métrica invariante bajo dilataciones. Definimos $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mediante la regla:

$$\rho(a, b) := \begin{cases} \dfrac{\|a - b\|}{\max\{\|a\|, \|b\|\}}, & a \in V,\ b \in V, \quad a \ne \mathbf{0}_V \quad \vee \quad b \ne \mathbf{0}_V; \\ 0, & a = b = \mathbf{0}_V. \end{cases}$$

Demuestre que ρ es una métrica. Demuestre que para cualesquiera $a, b \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se cumple la igualdad

$$\rho(\lambda a, \lambda b) = \lambda \rho(a, b).$$

Matriz de Gram

Problemas principales

23. Criterio de invertibilidad de la matriz de Gram de una lista de vectores. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que la matriz de Gram $G(a_1, \ldots, a_m)$ es invertible si, y sólo si, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes.

24. Rango de la matriz de Gram de una lista de vectores. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que

$$\mathrm{r}(G(a_1, \ldots, a_m)) = \mathrm{r}(a_1, \ldots, a_m).$$

Producto interno asociado a una norma que cumple con la identidad de paralelogramo

25. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\|\cdot\|$ una norma sobre V que cumple con la identidad de palalelogramo. Demuestre que en existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que su norma asociada coincide con $\|\cdot\|$.

Isometrías

26. Sean V, W espacios vectoriales (ambos reales o ambos complejos) con producto interno y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal que preserva la ortogonalidad de vectores y preserva la norma de algún vector no nulo:

(i) Para cualesquiera $a, b \in V$, si $\langle a, b \rangle_V = 0$, entonces $\langle Ta, Tb \rangle_W = 0$.

(ii) Existe un vector $u \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ tal que $\|u\|_V = \|Tu\|_W$.

Demuestre que T es una isometría.