Valores y vectores propios

Tareas adicionales

Algunos de estos problemas compuso Gustavo Antonio Sandoval Angeles (como parte de su servicio social).

Estos problemas son más difíciles o más laboriosos que los problemas para el examen. Resolver completamente una subsección (un microtema) de esta lista ya es un gran reto y una pequeña investigación científica.

Coeficientes del polinomio característico

Aquí en todos los problemas se supone que A es una matriz cuadrada de orden n con entradas generales pertenecientes a un campo $\mathbb{F}$, es decir, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

Problemas auxiliares

1. Polinomio característico de una matriz de orden 2 con entradas generales. Calcule C_A, donde A es una matriz de orden 2 con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

2. Definición del determinante de una matriz (repaso). Recuerde la definición del determinante de una matriz cuadrada (en términos de permutaciones).

3. Entradas de la matriz $\boldsymbol{\lambda I_n - A}$ (repaso). Escriba una fórmula para la entrada (j,k) de la matriz $\lambda I_n - A$. Use el símbolo de Kronecker.

4. Fórmula para un sumando del determinante de $\boldsymbol{\lambda I_n - A}$. Por la definición del determinante, el polinomio característico de una matriz A se puede escribir como una suma de $n!$ sumandos, donde cada sumando $s(A,\lambda,\varphi)$ corresponde a una permutación φ del conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \sum_{\varphi \in S_n} s(A,\lambda,\varphi).$$

Escriba una fórmula explícita para $s(A,\lambda,\varphi)$. Muestre que $s(A,\lambda,\varphi)$ es un polinomio de grado $\le n$.

5. Calcule el sumando $s(A,\lambda,e)$ correspondiente a la permutación identidad e.

6. Muestre que si $\varphi \in S_n$ y $\varphi \neq e$, entonces $s(A, \lambda, e)$ tiene no más de $n-2$ entradas de la diagonal principal de A y por lo tanto es un polinomio de grado $\leq n-2$.

Denotemos los coeficientes del polinomio característico C_A por $c_0, \ldots, c_n$:

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0.$$

7. El polinomio característico es un polinomio mónico de grado $\boldsymbol{n}$. Demuestre que C_A es un polinomio de grado n y que $c_n = 1$.

8. El término independiente del polinomio característico. Calcule c_0.

Problemas principales

9. Menores principales. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y un subconjunto J del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, denotemos por $\Delta_J(A)$ al menor de A ubicado en la intersección de los renglones J y de las columnas J. Menores de estas forma (ubicadas en los mismos renglones y columnas) se llaman *menores principales*. Para una matriz general $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ escriba su menor principal $\Delta_{1,3}(A)$, es decir, su menor ubicado en la intersección de los renglons 1 y 3 con las columnas 1 y 3.

10. Coeficientes del polinomio característico de una matriz $\mathbf{3 \times 3}$. Encuentre una fórmula para los coeficientes del polinomio característico de una matriz general $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$. Para escribir el coeficiente de λ^1 en una forma breve use la notación del problema anterior (*menores principales*). Piense cómo escribir los coeficientes de λ^3, λ^2 y λ^0 en términos de menores principales.

11. Coeficiente de $\boldsymbol{\lambda^{n-1}}$ y su relación con la traza. Demuestre que $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$.

12. Adivine una fórmula general para los coeficientes del polinomio característico. Use el concepto de menores principales.

13. Tarea muy optativa. Encuentre algún libro dónde se demuestre la fórmula encontrada en el problema anterior.

Análisis del operador conmutador con una matriz fija de orden 2

Aquí suponemos que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ es una matriz fija. Denotamos sus entradas por a, b, c, d y las consideramos como parámetros dados:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definimos a la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ como

$$T(X) \coloneqq AX - XA \qquad \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Problemas auxiliares

14. Muestre que T es un operador lineal.

15. Halle la matriz asociada a T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problemas principales

16. Encuentre los valores propios de T (por supuesto, la respuesta debe ser en términos de a, b, c, d).

17. Dé los vectores propios de T.

18. Determine si T es diagonalizable.

Espectro del producto de dos operadores lineales en un espacio de dimensión finita no depende del orden de los factores

En los problemas de esta sección se supone que V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T, U \in \mathcal{L}(V)$. Vamos a demostrar que $\operatorname{sp}(TU) = \operatorname{sp}(UT)$.

Empezamos con $\lambda = 0$:

19. Sean $T, U \in \mathcal{L}(V)$ tales que $0 \in \operatorname{sp}(TU)$. Demuestre que $0 \in \operatorname{sp}(UT)$.

Para resolver el caso principal, $\lambda \neq 0$, hay (por lo menos) dos caminos.

Primer camino (construir el operador inverso)

20. Sean T y U tales que el operador $I - TU$ es invertible. Denotemos por R al operador inverso de $I - TU$:

$$R \coloneqq (I - TU)^{-1}.$$

Simplifique los siguientes productos:

$$(I - TU)R, \qquad TUR, \qquad R(I - TU), \qquad RTU.$$

21. Sean T y U tales que el operador $I - TU$ es invertible. Denotemos por R al operador inverso de $I - TU$:

$$R \coloneqq (I - TU)^{-1}.$$

De los operadores I, T, U y R construya un operador inverso al operador $I - UT$ usando solamente las operaciones de adición, subtracción y producto. En particular, con esto tendrá demostrado que $I - UT$ es invertible.

22. Sea λ tal que $\lambda \notin \operatorname{sp}(TU)$ y $\lambda \neq 0$. Usando el resultado del problema anterior demuestre que $\lambda \notin \operatorname{sp}(UT)$.

23. Sea $\lambda \in \operatorname{sp}(TU)$ tal que $\lambda \neq 0$. Usando el resultado del problema anterior demuestre que $\lambda \in \operatorname{sp}(UT)$.

Segundo camino (trabajar con valores y vectores propios)

24. Sea $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tal que λ es un valor propio de TU. Demuestre que λ es un valor propio e UT.

De los resultados de los problemas anteriores sigue inmediatamente el resultado principal:

25. Demuestre que $\operatorname{sp}(TU) = \operatorname{sp}(UT)$.

Espectro de una proyección no trivial

En los problemas de esta sección se supone que V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$.

Problemas auxiliares

26. Espectro de una proyección. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Demuestre que $\operatorname{sp}(P) \subseteq \{0, 1\}$.

27. Espectro del operador cero. Sea P el operador cero: $P = \mathbf{0}_{V \to V}$. Demuestre que $P^2 = P$ y calcule $\operatorname{sp}(P)$.

28. Espectro del operador identidad. Sea P el operador identidad: $P = I$. Demuestre que $P^2 = P$ y calcule $\operatorname{sp}(P)$.

Problema principal

29. Espectro de una proyección no trivial. Sea V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $P \neq I$, $P \neq \mathbf{0}$. Demuestre que $\operatorname{sp}(P) = \{0, 1\}$.

Potencias de una matriz cuadrada de orden dos

Problemas auxiliares

30. Teorema de Cayley–Hamilton (repaso). Recuerde el enunciado del teorema de Cayley–Hamilton.

31. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Denotemos por q y r al cociente y al resto al dividir f entre C_A:

$$f = q\,\mathrm{C}_A + r, \qquad \deg(r) < ???.$$

Establezca una relación entre $f(A)$ y $r(A)$.

32. Sean α, β dos números diferentes y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Encuentre los coeficientes λ, μ del resto al dividir f entre $(x-\alpha)(x-\beta)$:

$$f(x) = q(x)(x-\alpha)(x-\beta) + \xi x + \eta. \tag{1}$$

Sugerencia: a partir de (1) formar un sistema de dos ecuaciones lineales para las incógnitas ξ y η. Para obtener una de estas dos ecuaciones, en la igualdad (1) sustituir x por α. Para obtener la segunda ecuación, en la igualdad (1) sustituir x por β.

33. Sea α un número y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Encuentre los coeficientes λ, μ del resto al dividir f entre $(x-\alpha)^2$:

$$f(x) = q(x)(x-\alpha)^2 + \xi x + \eta. \tag{2}$$

Sugerencia: a partir de (2) formar un sistema de dos ecuaciones lineales para las incógnitas ξ y η. Para obtener una de estas dos ecuaciones, puede en la iguadad (2) sustituir $x = \alpha$. Para obtener la segunda ecuación, puede derivar (2) y luego sustituir $x = \alpha$.

Problemas principales

34. Sean $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ y $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$, donde $\alpha \neq \beta$. Encontrar $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ tales que

$$A^m = \xi A + \eta I_2.$$

35. Sean $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ y $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \{\alpha\}$. Encontrar $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ tales que

$$A^m = \xi A + \eta I_2.$$

Sucesión de Fibonacci y una progresión geométrica de matrices

Problemas auxiliares

La *sucesión de Fibonacci* $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ se define mediante dos condiciones iniciales

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \tag{3}$$

y una *fórmula recursiva de segundo orden* (es decir, cada elemento F_n se expresa a través de dos elementos anteriores):

$$\forall n \in \{2, 3, \ldots\} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{4}$$

Los elementos de estas sucesión se llaman *números de Fibonacci.*

36. Calcule F_n para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Truco principal: pasar de números a vectores. Denotemos por v_n al vector formado por dos elementos sucesivos de la sucesión de Fibonacci:

$$v_n := \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

37. Muestre que las dos condiciones iniciales (3) se pueden escribir como una condición inicial para el vector v_0:

$$v_0 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

Problemas principales

38. Muestre que las componentes F_{n+1} y F_{n+2} del vector v_{n+1} son combinaciones lineales de las componentes F_n y F_{n+1} del vector v_n:

$$F_{n+1} = \underbrace{\qquad}_{?} F_n + \underbrace{\qquad}_{?} F_{n+1};$$

$$F_{n+2} = \underbrace{\qquad}_{?} F_n + \underbrace{\qquad}_{?} F_{n+1}.$$

39. Escriba dos ecuaciones del problema anterior como una ecuación matricial:

$$v_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{A} v_n.$$

40. Muestre por inducción que $v_n = A^n v_0$.

41. Muestre que F_n es una entrada (¿cuál?) de la matriz A^n.

42. (Programación, problema optativo). Recordar o buscar en internet el *algoritmo de exponenciación binaria*. Usando este algoritmo (para matrices 2×2) y los resultados de los problemas anteriores escriba un programa que calcule el n-ésimo número de Fibonacci para n grandes. Se recomienda usar lenguajes de programación que permiten trabajar con números enteros arbitrariamente grandes.

43. Calcule los valores propios de la matriz A.

44. Busque la definición de la *razón dorada* φ (llamada también *razón áurea*, *número áureo*). Exprese los valores propios de A en términos de φ.

45. Calcule los vectores propios de A.

46. Usando los resultados del problema anterior calcule A^n.

47. Usando el resultado del problema anterior escriba una fórmula explícita para F_n.

Norma de Frobenius y función exponencial

Problemas auxiliares

48. Escriba la definición de la norma de Frobenius de una matriz.

49. Escriba la definición de convergencia de una sucesión de matrices.

50. Sea $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de matrices y sea B una matriz. Demuestre que la sucesión $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ converge a B si, y sólo si,

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - B\|_F = 0.$$

Problemas principales

51. Propiedad subaditiva de la norma de Frobenius. Demuestre que la función $\|\cdot\|_F$ cumple con la propiedad subaditiva:

$$\|A+B\|_F \le \|A\|_F + \|B\|_F \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

52. Propiedad submultiplicativa de la norma de Frobenius. Demuestre que $\|\cdot\|_F$ cumple con la propiedad submultiplicativa:

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Indicación: para acotar $(AB)_{i,j}$ aplique la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

53. Teorema de Weierstrass para la convergencia de series de matrices. Sea $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ una serie de matrices, $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supongamos que la serie numérica de sus normas de Frobenious converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_F < +\infty.$$

Demuestre que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge. Indicación: use el criterio de Cauchy.

54. Convergencia de la serie que define la exponencial de una matriz. Demuestre que para toda $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge. Indicación: use el teorema de Weierstrass.

55. Propiedad principal de la función exponencial. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$. Demuestre que

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B).$$