Formas bilineales y cuadráticas

Problemas teóricos adicionales

Base en el espacio vectorial de las formas bilineales

Problemas auxiliares

1. Producto tensorial de dos funcionales lineales. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{F}$ de la siguiente manera:

$$\forall u, v \in V \qquad f(u,v) \coloneqq \varphi(u)\psi(v).$$

Demuestre que f es bilineal. Esta forma bilineal se denota por $\varphi \otimes \psi$.

En los siguientes problemas $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base del espacio vectorial V y $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ es la base dual a la base $\mathcal{B}$. Notemos que $\mathcal{B}^*$ es una base de V^*.

2. Base dual (repaso). Recuerde cómo se definen los elementos $\theta_1, \ldots, \theta_n$ de la base dual. Recuerde la fórmula para $\theta_i(b_j)$.

3. Base dual, demostración de la independencia lineal (repaso). Recuerde cómo se demuestra la independencia lineal de los funcionales $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

4. Coordenadas de un funcional lineal respecto a la base dual (repaso). Sea $\varphi \in V^*$. Recuerde cómo se calculan las coordenadas de φ respecto a la base dual. En otras palabras, recuerde cómo expandir φ en una combinación lineal de $\theta_1, \ldots, \theta_n$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \theta_i.$$

5. Ejemplos. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ la base dual de $\mathcal{B}$. Calcule los siguientes valores:

$$(\theta_2 \otimes \theta_1)(b_1, b_1), \quad (\theta_2 \otimes \theta_1)(b_1, b_2), \quad (\theta_2 \otimes \theta_1)(b_2, b_1), \quad (\theta_2 \otimes \theta_2)(b_2, b_2),$$

Calcule los siguientes valores:

$$(\theta_1 \otimes \theta_1)(3b_1 + 4b_2, 5b_1 + 6b_2), \quad (\theta_1 \otimes \theta_2)(3b_1 + 4b_2, 5b_1 + 6b_2), \quad (\theta_2 \otimes \theta_1)(3b_1 + 4b_2, 5b_1 + 6b_2).$$

Calcule los siguientes valores:

$$(5\theta_1 \otimes \theta_1 + 6\theta_1 \otimes \theta_2 + 7\theta_2 \otimes \theta_1 + 8\theta_2 \otimes \theta_2)(b_2, b_2).$$

Problemas principales

6. Caso $n = 2$. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ la base dual. Sean $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$. Simplifique la expresión:

$$(\alpha_{1,1}\theta_1 \otimes \theta_1 + \alpha_{1,2}\theta_1 \otimes \theta_2 + \alpha_{2,1}\theta_2 \otimes \theta_1 + \alpha_{2,2}\theta_2 \otimes \theta_2)(b_p, b_q).$$

7. Caso $n = 2$, independencia lineal. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ la base dual. Demuestre que los siguientes funcionales son linealmente independientes:

$$\theta_1 \otimes \theta_1, \quad \theta_1 \otimes \theta_2, \quad \theta_2 \otimes \theta_1, \quad \theta_2 \otimes \theta_2.$$

8. Caso $n = 2$, generar al espacio. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ la base dual. Sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Encuentre algunos coeficientes $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2} \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \lambda_{1,1}\theta_1 \otimes \theta_1 + \lambda_{1,2}\theta_1 \otimes \theta_2 + \lambda_{2,1}\theta_2 \otimes \theta_1 + \lambda_{2,2}\theta_2 \otimes \theta_2).$$

9. Caso general. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ la base dual. Demuestre que la lista de funcionales bilineales

$$\big(\theta_p \otimes \theta_q\big)_{p,q=1}^{n}$$

es una base de $\mathcal{BL}(V)$. Calcule la dimensión de $\mathcal{BL}(V)$.

Base en el espacio vectorial de las formas bilineales simétricas

Problemas auxiliares

10. Ejercicio. Demuestre que $\mathcal{BL}_s(V)$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{BL}(V)$.

11. El cuadrado tensorial de un funcional lineal. Sea $\varphi \in V^*$. Muestre que la forma bilineal $\varphi \otimes \varphi$ es simétrica.

12. Simetrización del producto tensorial de dos funcionales lineales. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Muestre que la siguiente forma bilineal f es simétrica:

$$\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi.$$

13. Caso $n = 2$, independencia lineal. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V. Denotemos por $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ a la base dual. Demuestre que los siguientes funcionales lineales son linealmente independientes:

$$\theta_1 \otimes \theta_1, \qquad \theta_2 \otimes \theta_2, \qquad \theta_1 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes \theta_1.$$

14. Caso $n = 2$, completitud. Sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V. Denotemos por $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \theta_2)$ a la base dual. Sea $f \in \mathcal{BL}_s(V)$. Encuentre $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \alpha_{1,1}\theta_1 \otimes \theta_1 + \alpha_{2,2}\theta_2 \otimes \theta_2 + \alpha_{1,2}(\theta_1 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes \theta_1).$$

Problemas principales

15. Tarea adicional. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Denotemos por $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ a la base dual. Construya una base de $\mathcal{BL}_s(V)$. Calcule la dimensión de $\mathcal{BL}_s(V)$.