Triangulación de Schur de matrices cuadradas (descomposición de Schur de matrices cuadradas)

Objetivos. Demostrar que para cualquier matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe una matriz unitaria Q tal que la matriz Q^*AQ es triangular superior. En otras palabras, para cada operador lineal que actúa en $\mathbb{C}^n$ existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que respecto a esta base la matriz asociada al operador es triangular superior.

Requisitos. Base ortonormal, matriz asociada, operaciones con matrices por bloques, matriz triangular superior, valores y vectores propios, subespacio propio, subespacio invariante, matrices diagonales por bloques.

En este tema, si no decimos otra cosa, suponemos que $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

1 Observación (repaso: el espectro de la matriz compleja cuadrada es no vacío)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces $\operatorname{sp}(A) \neq \varnothing$. Para la demostración se considera el polinomio característico o el polinomio mínimo de A y se aplica el teorema que cualquier polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes complejos tiene por lo menos una raíz compleja.

2 Observación (para cada valor propio de una matriz compleja cuadrada existe un vector propio de norma 1)**.** En realidad, si $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $Av = \lambda v$, entonces el vector

$$u := \frac{1}{\|v\|}\, v$$

tiene las siguientes propiedades: $\|u\| = 1$ y $Au = \lambda u$.

3 Lema (sobre los subespacios invariantes bajo una matriz y su adjunta)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea $W \leq \mathbb{C}^n$ un subespacio invariante bajo A, esto es,*

$$\forall w \in W \qquad Aw \in W.$$

Entonces el subespacio $W^\perp$ es invariante bajo A^*.

Demostración. Sea $x \in W^\perp$, esto es, $x \perp W$. Entonces para cada $w \in W$ tenemos

$$\langle A^*x, w\rangle = \langle x, Aw\rangle = 0,$$

porque $Aw \in W$. $\square$

Denotamos por $U_n(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices complejas unitarias $n \times n$ y por $\mathbf{ut}_n(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices complejas triangulares superiores $n \times n$.

4 Lema. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea $Q \in U_n(\mathbb{C})$. Denotemos las columnas de Q por $q_1, \ldots, q_n$. Supongamos que $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ y el subespacio $\ell(q_1, \ldots, q_m)$ es invariante bajo A. Entonces la matriz Q^*AQ es triangular superior por bloques:*

$$Q^*AQ = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0_{(n-m)\times m} & D \end{array}\right],$$

donde B, C, D son algunas matrices. En otras palabras, para cada j, k con $m+1 \le j \le n$ y $1 \le k \le m$ se tiene

$$(Q^*AQ)_{j,k} = 0.$$

Demostración. Sean j, k en $\{1, \ldots, n\}$ tales que $j > m$, $k \le m$. Por la definición del producto de matrices es fácil ver que

$$(Q^*AQ)_{j,k} = q_j^* A q_k.$$

Denotemos el espacio $\ell(q_1, \ldots, q_m)$ por W. Como $q_k \in W$ y W es invariante bajo A, obtenemos que $Aq_k \in W$. Como $(q_1, \ldots, q_n)$ es una base ortonormal, q_j es ortogonal a los vectores $q_1, \ldots, q_m$. Luego $q_j \in W^\perp$ y $q_j^* A q_k = 0$. $\square$

5 Teorema (teorema de la triangulación ortonormal de las matrices complejas cuadradas)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe $Q \in U_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^*AQ \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Cambiemos la forma lógica del teorema. En vez de fijar n, tratamos n como una variable. Demostremos que para cada n se cumple la siguiente afirmación $\mathcal{P}(n)$: para cada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe $Q \in U_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^*AQ \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{C})$. Procedemos por inducción sobre n.

Sea $n = 1$. La matriz A es de tamaño 1×1, por eso es triangular superior. Ponemos $Q = I_1 = [1]$ y obtenemos el resultado.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que se cumple $\mathcal{P}(n-1)$ y demostremos $\mathcal{P}(n)$. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sea d_n un valor propio de A^* y sea q_n un vector propio normalizado asociado a d_n. Completamos q_n a una base ortonormal $q_1, \ldots, q_{n-1}, u_n$ del espacio $\mathbb{C}^n$. Denotamos por Q_1 la matriz formada por las columnas $q_1, \ldots, q_n$:

$$Q_1 = \big[q_1, \ldots, q_n\big].$$

Sea $W := \ell(q_1, \ldots, q_{n-1}) = \ell(q_n)^\perp$. Como q_n es un vector propio de A^*, el subespacio $\ell(q_n)$ es invariante bajo A^*. Por lo tanto, W es invariante bajo A. Por el Lema 4, la matriz $Q_1^* A Q_1$ es triangular superior por bloques:

$$Q_1^* A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} B & r \\ \hline 0_{1\times m} & s \end{array}\right],$$

donde $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $r \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $s \in \mathbb{C}$.

Aplicamos la hipótesis de inducción $\mathcal{P}(n-1)$ y encontramos una matriz $Q_2 \in U_{n-1}(\mathbb{C})$ tal que la matriz $T_2 \coloneqq Q_2^* B Q_2$ es triangular superior. Pongamos

$$Q_3 \coloneqq \operatorname{diag}(Q_2, 1) = \left[\begin{array}{c|c} Q_2 & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1}^* & 1 \end{array}\right], \qquad Q \coloneqq Q_1 Q_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q^* A Q = Q_3^* Q_1^* A Q_1 Q_3 &= \left[\begin{array}{c|c} Q_2^* & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1}^* & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B & r \\ \hline 0_{1\times m} & s \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} Q_2 & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1}^* & 1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Q_2^* & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1}^* & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} BQ_2 & r \\ \hline 0_{n-1}^* & s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Q_2^* B Q_2 & Q_2^* r \\ \hline 0_{n-1}^* & s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T_2 & Q_2^* r \\ \hline 0_{n-1}^* & s \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la última matriz es triangular superior. □

6 Observación (la triangulación de Schur para $n \geq 2$ no es única)**.** Sea $n \geq 2$. Para cada matriz unitaria $Q \in U_n(\mathbb{C})$ tenemos

$$I_n = Q I_n Q^*,$$

así que la factorización de Schur de la matriz I_n no es única.

7 Teorema (la triangulación de Schur para los operadores lineales en un espacio unitario de dimensión finita)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, con producto interno, y sea S un operador lineal $V \to V$. Entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio V tal que la matriz asociada $S_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ alguna base ortonormal de V. Denotemos por A la matriz asociada a S respecto a $\mathcal{F}$, esto es,

$$A \coloneqq S_{\mathcal{F}}.$$

Aplicamos el Teorema 5 a la matriz A y encontramos $Q \in U_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* A Q$ es triangular superior. Denotemos por $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ la base ortonormal que se obtiene de $\mathcal{F}$ por medio de la matriz Q^*:

$$b_j \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \overline{Q_{k,j}} f_k.$$

Esto implica que $\mathcal{F}$ se obtiene de $\mathcal{B}$ por medio de Q:

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} Q_{j,k} b_k.$$

Por la fórmula de cambio de base, $S_{\mathcal{B}} = Q^* S_{\mathcal{F}} Q$, esto es, $S_{\mathcal{B}} = Q^* A Q$. □