

Polinomios elementales y su aplicación para invertir la matriz de Vandermonde

Egor Maximenko

junto con Luis Angel González Serrano y Katia Anahí López Avendaño

<https://esfm.egormaximenko.com>

Escuela Superior de Física y Matemáticas

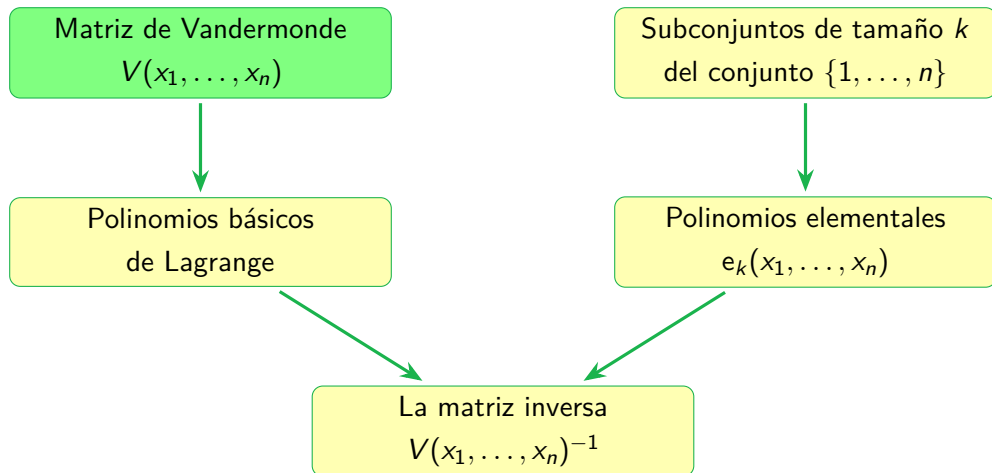
Instituto Politécnico Nacional

México

13 de marzo de 2026

6ta edición, Día Internacional de las Matemáticas en la ESCOM del IPN

Plan



La matriz de Vandermonde

Suponemos que $x_1, \dots, x_n$ son algunos números diferentes a pares.

Para $n = 4$,

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}.$$

La matriz de Vandermonde

Suponemos que $x_1, \dots, x_n$ son algunos números diferentes a pares.

Para $n = 4$,

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}.$$

En general, con la notación $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$V(x) := \left[x_j^{k-1} \right]_{j,k=1}^n.$$

El polinomio asociado a una lista de coeficientes

Dada una lista de números

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

denotamos por P_c el polinomio con estos coeficientes:

$$P_c(t) := \sum_{k=1}^n c_k t^{k-1}.$$

Para $n = 4$,

$$P_c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3.$$

Los valores de un polinomio en varios puntos

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ una lista de números,

$c = (c_1, \dots, c_n)$ una lista de coeficientes,

$y = (y_1, \dots, y_n)$ la lista de los valores del polinomio P_c en los puntos x_j :

$$y_j := P_c(x_j).$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1^3 \\ c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2^3 \\ c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + c_4x_3^3 \\ c_1 + c_2x_4 + c_3x_4^2 + c_4x_4^3 \end{bmatrix}$$

Los valores de un polinomio en varios puntos

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ una lista de números,

$c = (c_1, \dots, c_n)$ una lista de coeficientes,

$y = (y_1, \dots, y_n)$ la lista de los valores del polinomio P_c en los puntos x_j :

$$y_j := P_c(x_j).$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1^3 \\ c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2^3 \\ c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + c_4x_3^3 \\ c_1 + c_2x_4 + c_3x_4^2 + c_4x_4^3 \end{bmatrix} =$$

Los valores de un polinomio en varios puntos

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ una lista de números,

$c = (c_1, \dots, c_n)$ una lista de coeficientes,

$y = (y_1, \dots, y_n)$ la lista de los valores del polinomio P_c en los puntos x_j :

$$y_j := P_c(x_j).$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1^3 \\ c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2^3 \\ c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + c_4x_3^3 \\ c_1 + c_2x_4 + c_3x_4^2 + c_4x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Los valores de un polinomio en varios puntos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1^3 \\ c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2^3 \\ c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + c_4x_3^3 \\ c_1 + c_2x_4 + c_3x_4^2 + c_4x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Teorema

$$y = V(x)c.$$

El determinante de la matriz de Vandermonde

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

En general,

$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n (x_k - x_j).$$

El determinante de la matriz de Vandermonde

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

En general,

$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n (x_k - x_j).$$

Si $x_1, \dots, x_n$ son diferentes a pares, entonces

El determinante de la matriz de Vandermonde

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

En general,

$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n (x_k - x_j).$$

Si $x_1, \dots, x_n$ son diferentes a pares, entonces $\det V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ y

$V(x_1, \dots, x_n)$ es invertible.

El problema de interpolación polinomial

Dados $x_1, \dots, x_n$ diferentes a pares y algunos números $y_1, \dots, y_n$, encontrar $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$P_c(x_j) = y_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Por ejemplo, para $n = 3$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$P_c(x_1): \quad c_1 + x_1 c_2 + x_1^2 c_3 = y_1,$$

$$P_c(x_2): \quad c_1 + x_2 c_2 + x_2^2 c_3 = y_2,$$

$$P_c(x_3): \quad c_1 + x_3 c_2 + x_3^2 c_3 = y_3.$$

El problema de interpolación polinomial en términos de la matriz de Vandermonde

Este sistema de ecuaciones se escribe en forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

En general, tenemos la siguiente ecuación vectorial:

$$V(x)c = y.$$

Solución del problema de interpolación polinomial en términos de $V(x)^{-1}$

El problema de interpolación polinomial es equivalente a la ecuación vectorial

$$V(x)c = y.$$

La matriz $V(x)$ es invertible, y la solución se escribe en términos de la matriz inversa:

$$c = V(x)^{-1}y.$$

Objetivos de la plática

- Explicar una fórmula explícita para las componentes de la matriz $V(x_1, \dots, x_n)^{-1}$.
- Proponer un algoritmo eficiente para calcular la matriz $V(x_1, \dots, x_n)^{-1}$.

Bibliografía



Graham, Knuth, Patashnik (1994):

Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd. ed.



Egge (2019):

An Introduction to Symmetric Functions and Their Combinatorics.



Eisinberg, Fedele (2006):

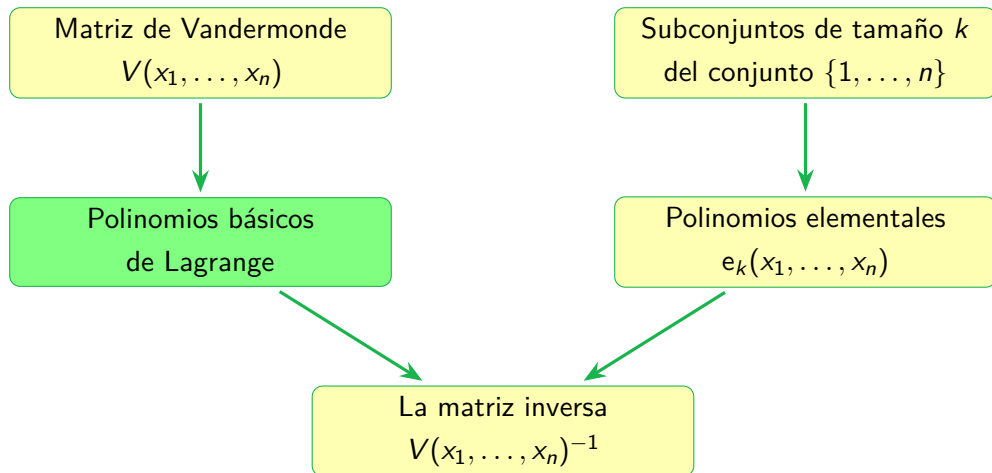
On the inversion of the Vandermonde matrix.



Respondek (2024):

History of confluent Vandermonde matrices and inverting them algorithms.

Plan



División de un polinomio entre un binomio mónico

Si P es un polinomio de una variable y a es un número, entonces existen un polinomio Q y un número r tales que

$$P(t) = (t - a)Q(t) + r.$$

Por ejemplo,

$$3t^3 - 8t^2 + 8t - 3 = (3t^2 - 2t + 4)(t - 2) + 5.$$

El teorema del residuo (pequeño teorema de Bézout)

$$P(t) = (t - a)Q(t) + r.$$

Teorema

$$P(a) = r.$$

Corolario

Si $P(a) = 0$, entonces $P(t)$ se divide entre $t - a$.

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b dos números, $a \neq b$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t)$$

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b dos números, $a \neq b$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t) =$$

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b dos números, $a \neq b$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t) = (t - a)(t - b).$$

El polinomio que se anula en tres puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 3 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t)$$

El polinomio que se anula en tres puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 3 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t) =$$

El polinomio que se anula en tres puntos dados

Ejercicio.

Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 3 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 0.$$

Respuesta:

$$P(t) = (t - a)(t - b)(t - c).$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 1.$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 1.$$

Respuesta:

$$P(t)$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 1.$$

Respuesta:

$$P(t) =$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean a, b, c tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 1.$$

Respuesta:

$$P(t) = \frac{(t - a)(t - b)}{(c - a)(c - b)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1, \qquad L_1(x_2) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

$$L_1(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_3)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

$$L_1(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_3) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

$$L_1(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_3) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

$$L_1(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_3) = 0,$$

$$L_2(x_1) = 0,$$

$$L_2(x_2) = 1,$$

$$L_2(x_3) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean x_1, x_2, x_3 tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(t) := \frac{(t - x_2)(t - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos x_1, x_2, x_3 .

$$L_1(x_1) = 1,$$

$$L_1(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_3) = 0,$$

$$L_2(x_1) = 0,$$

$$L_2(x_2) = 1,$$

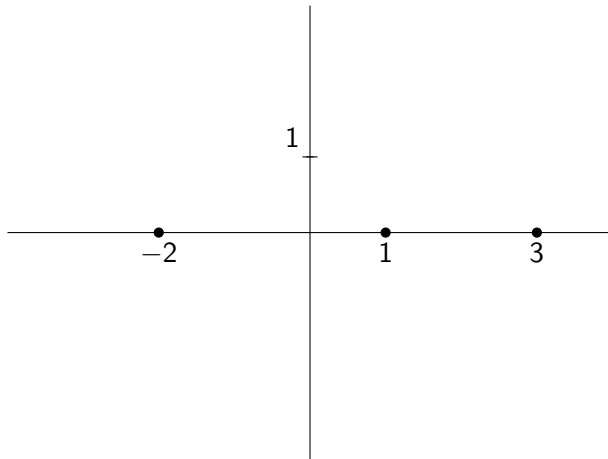
$$L_2(x_3) = 0,$$

$$L_3(x_1) = 0,$$

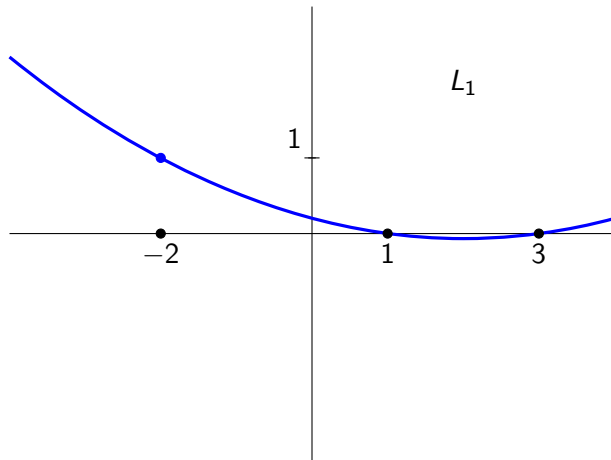
$$L_3(x_2) = 0,$$

$$L_3(x_3) = 1.$$

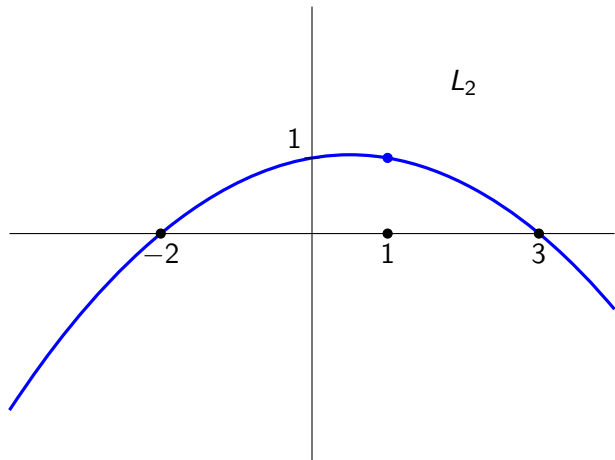
Ejemplo, $n = 3$



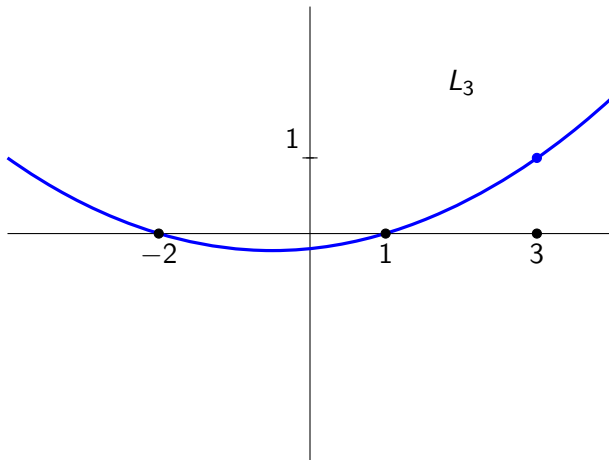
Ejemplo, $n = 3$



Ejemplo, $n = 3$



Ejemplo, $n = 3$



Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) :=$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) = 0.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) = 0.$$

Brevemente,

$$L_2(x_q)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) = 0.$$

Brevemente,

$$L_2(x_q) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números, diferentes a pares.

$$L_2(t) := \frac{(t - x_1)(t - x_3)(t - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Evaluamos L_2 en los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) = 0.$$

Brevemente,

$$L_2(x_q) = \delta_{2,q} = \begin{cases} 1, & q = 2; \\ 0, & q \neq 2. \end{cases}$$

Polinomios básicos de Lagrange

Sean $x_1, \dots, x_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (t - x_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x_j - x_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(x_q)$$

Polinomios básicos de Lagrange

Sean $x_1, \dots, x_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (t - x_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x_j - x_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(x_q) =$$

Polinomios básicos de Lagrange

Sean $x_1, \dots, x_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (t - x_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x_j - x_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(x_q) = \delta_{j,q}.$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

Multiplicamos la matriz de Vandermonde por el vector que consiste de estos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \\ M_{4,2} \end{bmatrix}$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

Multiplicamos la matriz de Vandermonde por el vector que consiste de estos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \\ M_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

Multiplicamos la matriz de Vandermonde por el vector que consiste de estos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \\ M_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(x_1) \\ L_2(x_2) \\ L_2(x_3) \\ L_2(x_4) \end{bmatrix}$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

Multiplicamos la matriz de Vandermonde por el vector que consiste de estos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \\ M_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(x_1) \\ L_2(x_2) \\ L_2(x_3) \\ L_2(x_4) \end{bmatrix} =$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 4$

Para $n = 4$, consideramos el polinomio $L_2(t)$ y denotamos sus coeficientes por $M_{k,2}$:

$$L_2(t) = M_{1,2} + M_{2,2}t + M_{3,2}t^2 + M_{4,2}t^3 = \sum_{q=1}^4 M_{q,2}t^{q-1}.$$

Multiplicamos la matriz de Vandermonde por el vector que consiste de estos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \\ M_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(x_1) \\ L_2(x_2) \\ L_2(x_3) \\ L_2(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

Formamos la matriz $M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix}$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

Formamos la matriz $M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} =$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

Formamos la matriz $M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & L_3(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & L_3(x_2) \\ L_1(x_3) & L_2(x_3) & L_3(x_3) \end{bmatrix}$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

Formamos la matriz $M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & L_3(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & L_3(x_2) \\ L_1(x_3) & L_2(x_3) & L_3(x_3) \end{bmatrix} =$$

$V(x)$ y polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Para cada k , denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = M_{1,k} + M_{2,k}t + M_{3,k}t^2 = \sum_{q=1}^3 M_{q,k}t^{q-1}.$$

Formamos la matriz $M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & L_3(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & L_3(x_2) \\ L_1(x_3) & L_2(x_3) & L_3(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$V(x)^{-1}$ y polinomios básicos de Lagrange

Para n general y para cada k en $\{1, \dots, n\}$,
denotamos por $M_{q,k}$ los coeficientes del polinomio L_k :

$$L_k(t) = \sum_{q=1}^n M_{q,k} t^{q-1}.$$

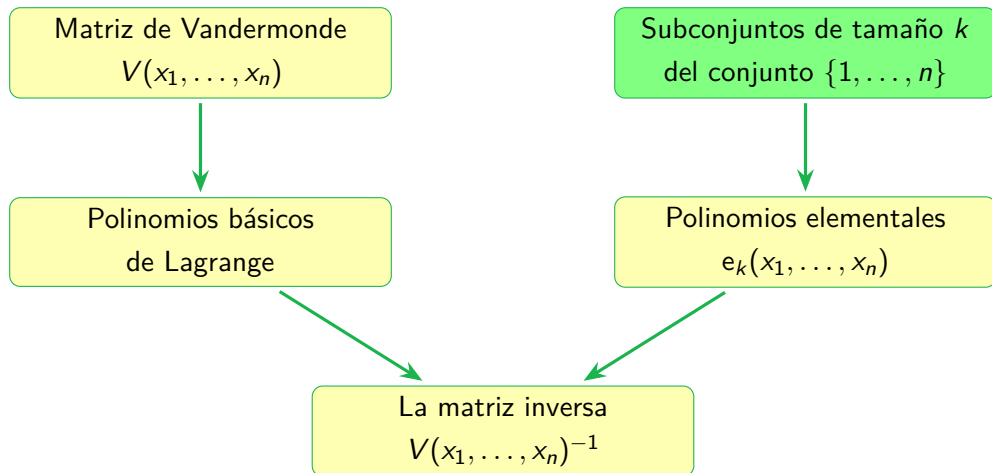
Formamos la matriz M :

$$M(x) := [M_{q,k}]_{q,k=1}^n.$$

Teorema

$V(x)$ es invertible, y su inversa es $M(x)$.

Plan



m -subconjuntos del conjunto $\{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Dados n, m en $\mathbb{N}_0$,

$$S_{n,m} := \left\{ A \subseteq \{1, \dots, n\} : \#A = m \right\}.$$

m -subconjuntos del conjunto $\{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Dados n, m en $\mathbb{N}_0$,

$$S_{n,m} := \left\{ A \subseteq \{1, \dots, n\} : \#A = m \right\}.$$

Por ejemplo,

$$S_{4,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \right\}.$$

m -subconjuntos de $\{1, \dots, n-1\}$ y m -subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$

$$S_{4,2} = \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \right\},$$

$$S_{5,2} = \left\{ \underline{\{1,2\}}, \underline{\{1,3\}}, \underline{\{1,4\}}, \{1,5\}, \underline{\{2,3\}}, \underline{\{2,4\}}, \{2,5\}, \underline{\{3,4\}}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\}.$$

Proposición

$$S_{n-1,m} \subseteq S_{n,m}.$$

La función que agrega el elemento n a cada conjunto

Para $n = 5$ y $m = 2$,

$$\begin{array}{c|cccc} S_{4,1} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\ J_{5,2} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ S_{5,2} & \{1, 5\} & \{2, 5\} & \{3, 5\} & \{4, 5\} \end{array}$$

La función que agrega el elemento n a cada conjunto

Para $n = 5$ y $m = 2$,

$$\begin{array}{c|cccc} S_{4,1} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\ J_{5,2} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ S_{5,2} & \{1, 5\} & \{2, 5\} & \{3, 5\} & \{4, 5\} \end{array}$$

$$J_{n,m}: S_{n-1,m-1} \rightarrow S_{n,m}, \quad A \mapsto A \cup \{n\}.$$

La función que agrega el elemento n a cada conjunto

Para $n = 5$ y $m = 2$,

$$\begin{array}{c|cccc} S_{4,1} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\ J_{5,2} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ S_{5,2} & \{1, 5\} & \{2, 5\} & \{3, 5\} & \{4, 5\} \end{array}$$

$$J_{n,m}: S_{n-1,m-1} \rightarrow S_{n,m}, \quad A \mapsto A \cup \{n\}.$$

Proposición

$J_{n,m}$ es una función inyectiva.

Fórmula recursiva

$$S_{5,2}$$

Fórmula recursiva

$$S_{5,2} =$$

Fórmula recursiva

$$S_{5,2} = \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\}$$

Fórmula recursiva

$$S_{5,2} = \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\}$$

=

Fórmula recursiva

$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \end{aligned}$$

Fórmula recursiva

$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \end{aligned}$$

Fórmula recursiva

$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \right\} \cup J_{5,2}[\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}] \end{aligned}$$

Fórmula recursiva

$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \right\} \cup J_{5,2}[\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}] \\ &= \end{aligned}$$

Fórmula recursiva

$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \right\} \\ &= \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \right\} \cup J_{5,2}[\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}] \\ &= S_{4,2} \cup J_{5,2}[S_{4,1}]. \end{aligned}$$

Fórmula recursiva

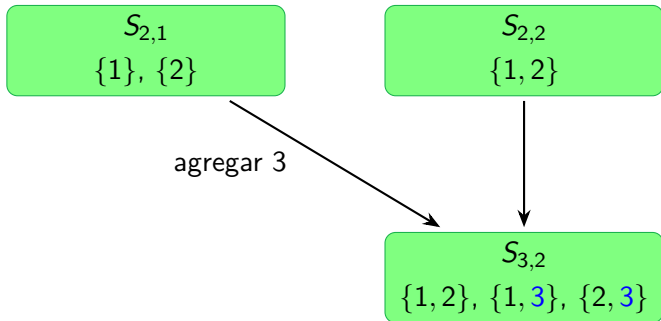
$$\begin{aligned} S_{5,2} &= \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \} \\ &= \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \} \\ &= \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \} \cup J_{5,2}[\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}] \\ &= S_{4,2} \cup J_{5,2}[S_{4,1}]. \end{aligned}$$

Teorema

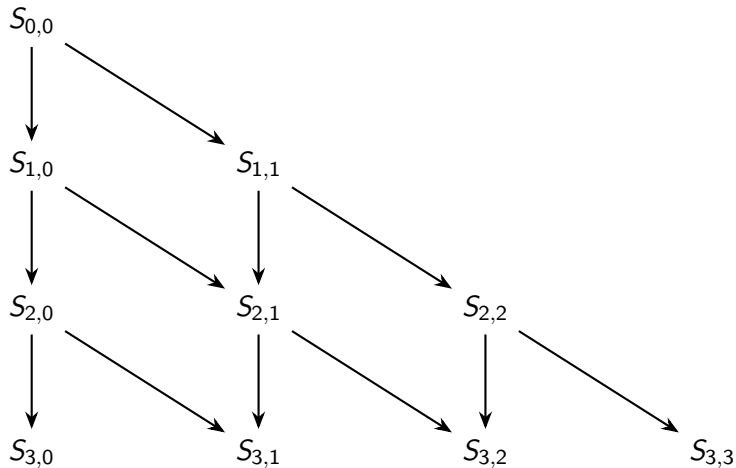
$$S_{n,m} = S_{n-1,m} \cup J_{n,m}[S_{n-1,m-1}], \quad \text{y esta unión es disjunta.}$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$S_{n,m} = S_{n-1,m} \cup J_{n,m}[S_{n-1,m-1}].$$



Esquema para construir $S_{n,m}$ usando la fórmula recursiva



Coeficientes binominales

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m! (n - m)!}.$$

Por ejemplo,

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{20}{2} = 10.$$

Fórmula recursiva para los coeficientes binominales:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

El número de elementos

Tenemos fórmulas recursivas similares:

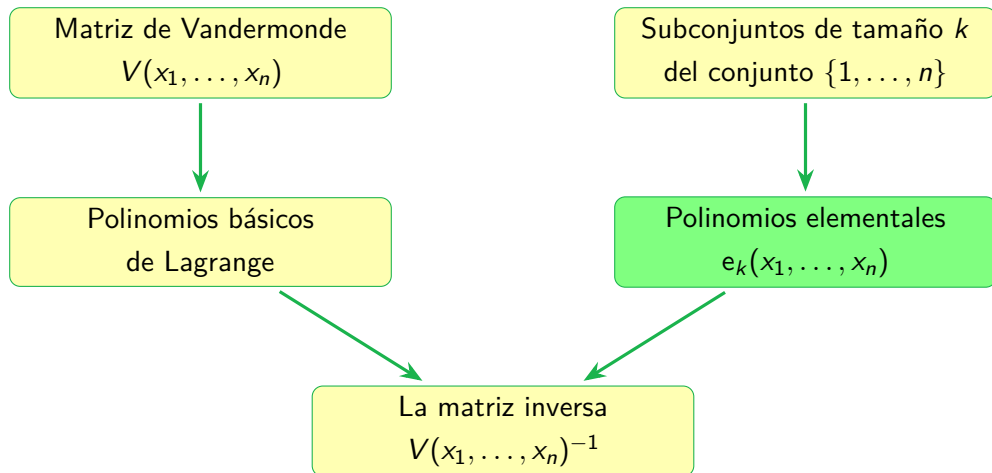
$$S_{n,m} = S_{n-1,m} \cup J_{n,m}[S_{n-1,m-1}].$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\#S_{n,m} = \binom{n}{m}.$$

Plan



Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_0(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos: ejemplos

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1.$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1) = 0,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1) = 0,$$

$$e_3(x_1)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1) = 0,$$

$$e_3(x_1) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 1$

$$e_0(x_1) = 1,$$

$$e_1(x_1) = x_1,$$

$$e_2(x_1) = 0,$$

$$e_3(x_1) = 0.$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2) = 0,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2) = 0,$$

$$e_4(x_1, x_2)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2) = 0,$$

$$e_4(x_1, x_2) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 2$

$$e_0(x_1, x_2) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$e_3(x_1, x_2) = 0,$$

$$e_4(x_1, x_2) = 0.$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

$$e_4(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

$$e_4(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos, $n = 3$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

$$e_4(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2}$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} =$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3)$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) =$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = \prod_{k \in \{1,2\}} x_k + \prod_{k \in \{1,3\}} x_k + \prod_{k \in \{2,3\}} x_k$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = \prod_{k \in \{1,2\}} x_k + \prod_{k \in \{1,3\}} x_k + \prod_{k \in \{2,3\}} x_k =$$

Polinomios elementales simétricos y subconjuntos, ejemplo

$$S_{3,2} = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \right\},$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = \prod_{k \in \{1,2\}} x_k + \prod_{k \in \{1,3\}} x_k + \prod_{k \in \{2,3\}} x_k = \sum_{A \in S_{3,2}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3}$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3} =$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3} = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \right\},$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3} = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \right\},$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3} = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \right\},$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

Polinomios elementales simétricos, definición general

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{A \in S_{n,k}} \prod_{k \in A} x_k.$$

Ejemplo. Para $n = 4$ y $k = 3$,

$$S_{4,3} = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \right\},$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4.$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

=

Fórmula recursiva, ejemplo

$$\begin{aligned}e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\end{aligned}$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$\begin{aligned}e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= \end{aligned}$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$\begin{aligned}e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4(x_1 + x_2 + x_3)\end{aligned}$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$\begin{aligned}e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4(x_1 + x_2 + x_3) \\&= \end{aligned}$$

Fórmula recursiva, ejemplo

$$\begin{aligned}e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4(x_1 + x_2 + x_3) \\&= e_2(x_1, x_2, x_3) + x_4 e_1(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Fórmula recursiva, en general

Teorema

$$e_m(x_1, \dots, x_n) = e_m(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n e_{m-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) .$$

Fórmula recursiva, en general

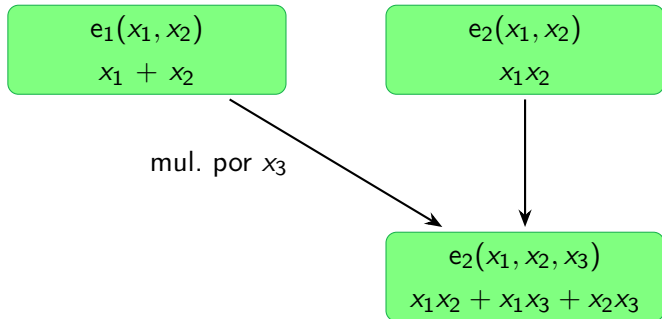
Teorema

$$e_m(x_1, \dots, x_n) = e_m(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n e_{m-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) .$$

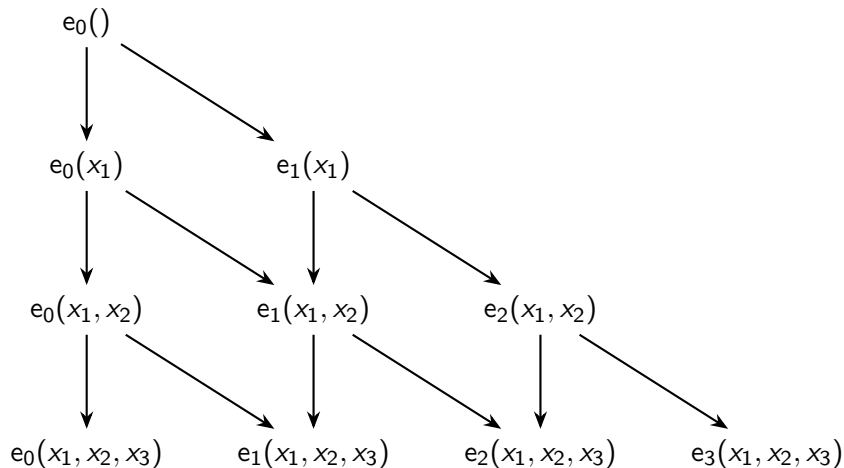
Idea de demostración: usar la fórmula recursiva para $S_{n,m}$.

Fórmula recursiva, ejemplo

$$e_m(x_1, \dots, x_n) = e_m(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n e_{m-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$



Esquema para calcular los polinomios elementales simétricos



Ejercicio: programar un algoritmo para calcular $e_k(x)$ para cada k

Entrada: arreglo de números $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$.

Salida: arreglo de números $e_0(x), e_1(x), \dots, e_n(x)$.

```
def elem(x):  
    for ...  
        for ...  
    return v
```

Para $x = (3, 5)$, el resultado correcto es $(1, 8, 15)$.

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$(t - x_1)(t - x_2)$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$(t - x_1)(t - x_2) =$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$(t - x_1)(t - x_2) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$(t - x_1)(t - x_2) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2$$
$$=$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) =$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) = t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)t - x_1x_2x_3$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) &= t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)t - x_1x_2x_3 \\ &= \end{aligned}$$

Fórmulas de Vieta, $n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) &= t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1x_2 \\ &= t^2 - e_1(x_1, x_2)t + e_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) &= t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)t - x_1x_2x_3 \\ &= e_0(x)t^3 - e_1(x)t^2 + e_2(x)t - e_3(x)t^0.\end{aligned}$$

Fórmula de Vieta general

Teorema

$$\prod_{j=1}^n (t - x_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} e_{n-k}(x_1, \dots, x_n) t^k.$$

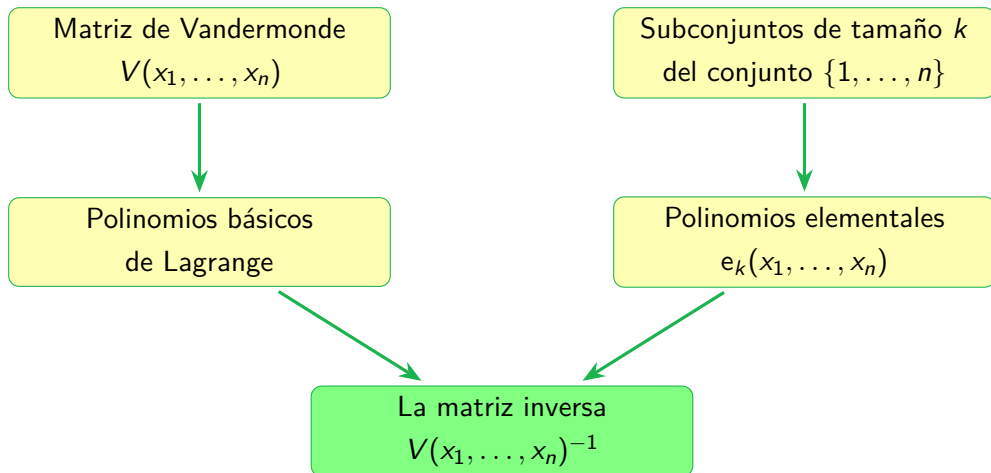
Fórmula de Vieta general

Teorema

$$\prod_{j=1}^n (t - x_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} e_{n-k}(x_1, \dots, x_n) t^k.$$

Idea de demostración: por inducción sobre n .

Plan



$V(x_1, x_2, x_3)^{-1}$, una columna

$$\begin{aligned} L_2(t) &= \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{t^2 - (x_1 + x_3)t + x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ &= \underbrace{\frac{e_2(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{1,2}} + \underbrace{\frac{-e_1(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{2,2}} t + \underbrace{\frac{e_0(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{3,2}} t^2. \end{aligned}$$

$V(x_1, x_2, x_3)^{-1}$, una columna

$$\begin{aligned}
 L_2(t) &= \frac{(t - x_1)(t - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{t^2 - (x_1 + x_3)t + x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\
 &= \underbrace{\frac{e_2(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{1,2}} + \underbrace{\frac{-e_1(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{2,2}} t + \underbrace{\frac{e_0(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}_{M_{3,2}} t^2.
 \end{aligned}$$

$$V(x_1, x_2, x_3)^{-1} = \begin{bmatrix} * & \frac{e_2(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & * \\ * & \frac{-e_1(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & * \\ * & \frac{e_0(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & * \end{bmatrix}.$$

$$V(x_1, x_2, x_3)^{-1}$$

$$V(x_1, x_2, x_3)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e_2(x_2, x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{e_2(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{e_2(x_1, x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ \frac{-e_1(x_2, x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{-e_1(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{-e_1(x_1, x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ \frac{e_0(x_2, x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{e_0(x_1, x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{e_0(x_1, x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{bmatrix}.$$

Fórmula general

Teorema

Sean $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $x_1, \dots, x_n$ son diferentes a pares. Entonces, para cada j, k en $\{1, \dots, n\}$,

$$(V(x)^{-1})_{j,k} = \frac{(-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\prod_{q \neq k} (x_k - x_q)}.$$

Usamos la fórmula recursiva para bajar el número de variables

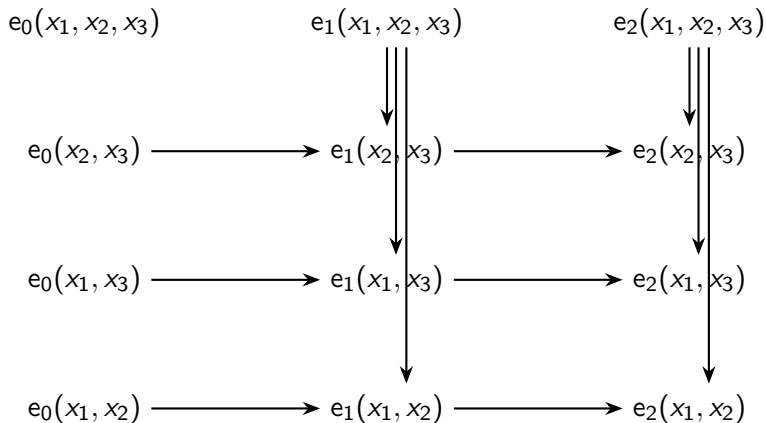
Nosotros proponemos la siguiente idea para calcular $e_m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$.

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = e_2(x_1, x_3, x_2) = e_2(x_1, x_3) + x_2 e_1(x_1, x_3).$$

Por lo tanto,

$$e_2(x_1, x_3) = e_2(x_1, x_2, x_3) - x_2 e_1(x_1, x_3).$$

Esquema para calcular los polinomios elementales con variables excluidas



Ejercicio: programar un algoritmo para calcular $V(x)^{-1}$

Entrada: arreglo de números $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$.

Salida: la matriz $V(x_1, \dots, x_n)^{-1}$.

```
def inverse_vandermonde(x):  
    M = matriz_nula_n_por_n  
    elem_all = elem(x)  
    for k in range(n):  
        denom = ...  
        elem_excluded = ...  
        for j in range(n):  
            M[j, k] = ...  
    return M
```

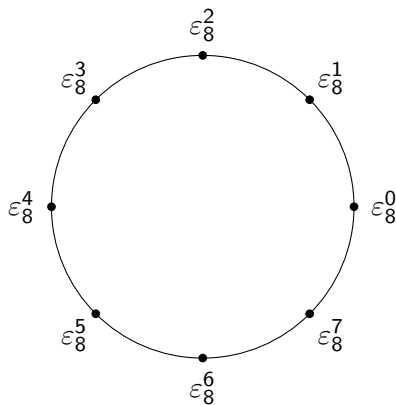
Ejercicio: complejidad del algoritmo

Mostrar que la complejidad de este algoritmo es

$$O(n^2).$$

¿Cuál de las matrices de Vandermonde es la más interesante?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_n^2 & \varepsilon_n^4 & \dots & \varepsilon_n^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_n^{n-1} & \varepsilon_n^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$



La matriz de Fourier